TAREA 1, Cálculo Diferencial e Integral II,

Entrega: Lunes 11 de febrero de 2019.

Grupo 1: A-Ma

En grupos de 3 a 5 alumnos, sólo entregar las preguntas con *. TODOS deben hacer la tarea.

1. Sean $x_n, y_n$ dos sucesiones de números reales. Demuestra que si $x_n \to \alpha$ y $y_n \to \beta$ entonces $x_n + y_n \to \alpha + \beta$.

2. Determina en los casos siguientes si $\{y_k\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$.
   a) $\{y_k\} = \{5k\}$, $\{x_n\} = \{n\}$, b) $\{y_k\} = \{k^5\}, \{x_n\} = \{n\}$
   c) $\{y_k\} = \{k^4\}, \{x_n\} = \{n^2\}$.

3. De las siguientes sucesiones di cuales son monótonas y si están acotadas superior o inferiormente.
   a) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ b) $x_n = \frac{n}{3n+2}$
   c) $y_n = \cos n$ d)$x_n = \frac{n}{3^n}$.

4. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:
   a)$x_n = \frac{n+100}{n^2+1}$ b)$x_n = \frac{3n^5+5\sqrt{n}}{2n^5+3n^2+1}$ c)$y_n = \frac{7\sqrt{n}-1}{\pi\sqrt{n}+25}$.

A* Demuestra que el límite $L$ de cada una de las sucesiones es el que se indica:
   a) $x_n = \frac{1}{n^p}, p > 0; L = 0$ b) $y_n = \frac{n(n+1)}{n^2}\cos(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{\pi}{n}); L = 1$,
   c) $z_n = \sqrt{n(n+a)} - n; L = \frac{a}{2}$, d) $w_n = \frac{(e^n)^\alpha}{n^\beta}, \alpha, \beta > 0; L = \infty$.

5. Demuestra que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no negativos y $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}$, entonces se cumple:

   (a) $\alpha < 1$ implica que la sucesión $\{x_n\}$ converge a cero.

   (b) $\alpha > 0$ implica que la sucesión $\{x_n\}$ diverge a $\infty$.

   (c) $\alpha = 1$, no tenemos información.

   Este es el llamado *criterio de la raíz* para sucesiones. Sugerencia: Para demostrar el inciso a), observa que existen $0 < M < 1$ y $0 < N$ tales que $0 \leq x_n^{1/n} < M$, si $n \geq N$

B* Utilizando el resultado anterior determina la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones:
   a) $\{\frac{n^2}{2^n}\}$, b) $\{\frac{n}{c^n}\}$ donde $c > 0$ c) $\{\frac{n^p}{e^n}\}, p \geq 0$.

6. Demuestra que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(b) < c < f(a)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

C* Demuestra que si $x_n \to x$ y $x < 0$ entonces existe $N$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $x_n < 0$.

D* Escribe los términos de recurrencia de la sucesión $a_n$ si los tres primeros términos de la sucesión son $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$ y $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ y encuentra el límite de la sucesión. Para encontrar el límite utiliza el hecho de que si $a_n \to L$ entonces $a_{n+1} \to L$.

E* Calcula $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. (Acuérdense de la técnica usada con funciones).