Cálculo Diferencial e Integral II
Tarea 2
Entregar problema con * grupo II (Me-Z)
Lunes 25 de febrero 2019
TODOS deben hacer la tarea

1. Determine cuales de las siguientes sucesiones convergen o divergen:

$$a)\ x_n = \tfrac{n}{n+1} - \tfrac{n+1}{n}, \quad n \geq 1 \qquad b)\ x_n = \tfrac{n^2}{n+1}, \quad n \geq 0 \qquad c)\ x_n = \tfrac{n}{2^n}, \quad n \geq 1$$
$$d)\ x_n = \tfrac{1+(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1 \qquad e)\ x_n = 2^{1/n}, \quad n \geq 1 \qquad f)\ x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \geq 1$$

2. Sean a_1 y b_1 dos números positivos tales que $a_1 < b_1$. Defina a_2 y b_2 de la siguiente manera:

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Inductivamente defina

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Pruebe que las sucesiones (a_n) y (b_n) convengen.

3. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b \leq a$, la sucesión $(\sqrt[n]{a^n + b^n})$ es convergente al valor a.

A*. Demuestre que la sucesión $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots$, converge. Encuentre el límite.

B*. Escriba tres sucesiones de Cauchy y tres sucesiones que no sean de Cauchy.

4. Pruebe (usando la definición) que la sucesión $(1/n^2)$ es de Cauchy.

5. Determine las regiones en las cuales se puede definir una función inversa a las siguientes funciones:

$$a)\ \ x^2 + x, \quad b)\ \ x + 4, \quad c)\ \ \sin x, \quad d)\ \ \tan x$$

6. Exprese con el símbolo de suma las siguientes expresiones:

   a) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$
   b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$
   c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \cdots$

C*. Pruebe que la sucesión (S_n) de suma parciales, donde

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!},$$

Es convergente y converge a un número entre 2 y 3.

7. Si a_k es monótona y $\sum a_m$ converge, demuestre que $\lim_{k\to\infty} k a_k$ existe y es finito. Si eres más temerario, prueba que dicho límite es cero.

D*. Dadas las sumas parciales siguientes diga cuando las series generadas son o no convergentes, de ser convergentes diga cúal es el límite.

$$a)\ \ s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}, \quad b)\ \ s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+i}}, \quad c)\ \ s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}, \quad d)\ \ s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

8. Demuestre que $\lim_{m\to\infty} cos^{2m}(\pi\, x)$ existe para cada valor de x y es igual a 0 o 1 según sea x entero o no.

E*. Use los criterios de convergencia de series para analizar:

$$\sum \frac{(-1)^{m+1}}{m^3}, \qquad \sum (-1)^{m+1} \log(1+\tfrac{1}{m}), \qquad \sum \frac{m!}{(m+2)!}$$

$$\sum \frac{m^2}{2^n}, \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{(n+1)}{2^n}$$

9. Demuestre que si los elementos de la sucesión (a_n) se definen por

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

la sucesión es convergente. Demuestre que el límite de la sucesión (b_n), donde

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

existe y es igual al límite de la sucesión (a_n).