Cálculo Diferencial e Integral II

Tarea 5

Entrega preguntas con *: lunes 29 de abril de 2019, en equipos de 3 a 5 alumnos

1. *(Cambio de variable).* Calcula las siguientes integrales:
   a *) $\int 3ab^2x^4dx$ b *) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$ c)$\int \operatorname{sen}\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$ d) $\int(x^2+2x-5)(x^3+3x^2-15x)^4dx$ e) $\int \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x}dx$

2. *(Integración por partes).* Calcula las siguientes integrales:
   a*) $\int \log^2 x dx$ b *)$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ c)$\int x^2e^{-x}dx$ d)$\int x^2\operatorname{sen}2xdx$ e) $\int e^{2x}\cos 2xdx$ g) $\int(\log x)^2dx$

3. Las siguientes integrales involucran sustituciones simples. Intenta hacerlas mentalmente.
   a) $\int e^x\cos e^x dx$ b) $\int e^{e^x}e^x dx$ c) $\int \log(\cos x)\tan x dx$ d) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ e) $\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx$

4. *(Sustitución trigonométrica e hiperbólica).* Calcule las siguientes integrales:
   a*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ b*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ d) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

5. *(Fracciones parciales).* Encuentre una expresión en términos de funciones elementales para las siguientes integrales.
   a*)$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$ b*)$\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ c)$\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx$ d))$\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx$

6. *(Potencias de funciones trigonométricas).* Calcula las siguientes integrales:
   a*)$\int \operatorname{sen}^4(2x)dx$ b*)$\int 3x^6\operatorname{sen}^5(x^7+3)\cos^2(x^7+3)dx$ c)$\int \sec^4(3x)dx$ d))$\int \cos(5x)\cos x dx$

7. *(Cambio de variable directo).* Evalúa las siguientes integrales, aplicando las sustituciones indicadas:
   a*)$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\cos^2 x dx; u=\cos x$ b*)$\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(2x^2)dx, u=2x^2$ c)$\int_{3/4}^{4/3}\frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, z=\frac{1}{x}$
   d) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2x\cos x dx; u=\operatorname{sen}x$

8. *(Función Gamma*)* . Una forma de extender la noción de "factorial" a los reales positivos es a través de la función $\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definida de la siguiente forma:

$$\Gamma(x) := \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^{b} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   a) Pruebe que $\Gamma(1)=1$. Usando integración por partes, muestre que para cada natural $n\neq 0$ se satisface $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. Con esta relación muestre por inducción que $\Gamma(n+1)=n!$

   b) Usando que para todo $x>0$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n<x\leq n+1$ y el inciso a), muestre que $\Gamma(x)$ es finita.

   c) Pruebe que para $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Usando este resultado, muestre que solo es necesario conocer la función Γ en el intervalo $(0,1]$ para poder conocerla en todo $(0,\infty)$.

   d) Asumiendo que Γ es continua en $(0,\infty)$ y el inciso anterior, pruebe que dicha función es singular en el origen *i.e*

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x)=\infty$$

9. *(Relaciones en recurrencias*).* Pruebe las siguientes igualdades

   a) $\int(\log x)^m dx = x(\log x)^m - m\int(\log x)^{m-1}dx.$ b) $\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx.$

   c) $\int x^m\sin x dx = -x^m\cos x + mx^{m-1}\sin x - m(m-1)\int x^{m-2}\sin x dx.$

10. *(Potencias de funciones trigonométricas e hiperbólicas*).* Encuentre una expresión en términos de funciones elementales para cada $n\in\mathbb{N}$ en las siguientes integrales.
    a) $\int sinh^n x\,dx,$ b) $\int tan^{2n+1}x\,dx.$

11. *(Cambio de variable*).* Se dice que $P(x,y)$ es polinomio de grado ℓ si $P(x,y)$ es suma de monomios de la forma $a_{m,n}x^m y^n$ tal que $m+n \leq \ell$ y $a_{m,n} \neq 0$ para cada $m,n \in \mathbb{N}$. Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ polinomios de grado i y j respectivamente con $i < j$ y defina la función racional $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$. Muestre que

$$\int R(sinh\,\theta, cosh\,\theta)\,d\theta = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}dt\Big|_{t=tanh(\theta/2)}$$

NOTA: El preámbulo no es necesario para probar la igualdad pero si es necesario para probar que la integral de la derecha puede expresarse en términos de funciones elementales usando integración por fracciones parciales.