Cálculo Diferencial e Integral II

Tarea 3

Dada $x \in \mathbb{R}$, defina las funciones seno y coseno hiperbólico de la siguiente manera:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. *(Funciones hiperbólicas).* Detemine la forma explícita (en términos de la función $\exp(x)$) para las funciones:

$$tanh(x) := \frac{sinh(x)}{cosh(x)}, \quad ctgh(x) := \frac{cosh(x)}{sinh(x)}, \quad sech(x) := \frac{1}{cosh(x)} \quad \text{y} \quad csch(x) := \frac{1}{sinh(x)},$$

   Encuentre el dominio y contradomino de cada una de estas cuatro funciones hiperbólicas y realice un bosquejo de sus gráficas usando los resultados de cálculo I (ej. regiones de monotonía, paridad e imparidad, asíntotas, indeterminaciones, puntos críticos y comportamientos asintóticos).

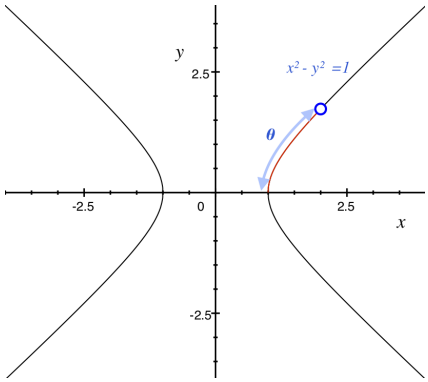
2. *(Identidades).* Pruebe las siguientes propiedades

   a) $cosh(x) + sinh(x) = e^x$. Esta ecuación prueba que $sinh(x)$ y $cosh(x)$ son la parte impar y par de e^x.
   b) $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$. Esta ecuación explica el adjetivo *hiperbólico*.
   c) $1 - tanh^2(x) = sech^2(x)$.
   d) $sinh(2t) = 2sinh(t)cosh(t)$.
   e) $cosh(2t) = cosh^2 t + sinh^2 t$.
   f) $cosh(x/2) = \frac{1}{2}(1 + cosh(x))$.

3. *(Suma de argumentos).* Pruebe las siguientes propiedades para suma de argumentos

   a) $sinh(x + y) = sinh(x)cosh(y) + cosh(x)sinh(y)$
   b) $cosh(x + y) = cosh(x)cosh(y) + sinh(x)sinh(y)$
   c) $sinh(x) + sinh(y) = 2sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4. *(Interpretación geométrica).* Con base en la identidad 2.b y la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$, determine que distancias representan a las funciones $sinh(\theta)$, $cosh(\theta)$ y $tanh(\theta)$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es la distancia *signada* del punto $(1, 0)$ a $(x, \pm\sqrt{x^2 - 1})$ medida a lo largo de la hipérbola.



5. *(Gráfica de funciones hiperbólicas inversas).* Encuentre la derivada de cada una de las seis funciones hiperbólicas. Con este resultado y el ejercicio 1 determine en que condiciones existe la función inversa. De la derivada de cada una de las funciones hiperbólicas inversas y haga un bosquejo de su gráfica.

6. *(Funciones hiperbólicas inversas).* Determine analíticamente las expresiones para las funciones inversas de $sinh(x)$ y $cosh(x)$. Hint: Resuelva $e^x \pm e^{-x} = 2y$ para x usando en cambio de variable $\tilde{x} = e^x$.

7. *(Extra).* Con el mismo cambio de variable busque expresiones explícitas para las demás funciones inversas.