TAREA 5, Cálculo I, I-2019

Entrega: Martes 25 de septiembre. GRUPOS de 2 PERSONAS

1. Dados los números x_0, y $\varepsilon > 0$ encuentra $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$, para las funciones siguientes: a) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2, \varepsilon = 0.5$, b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1, x_0 = 1, x_0 = 2, \varepsilon = 0.001, \varepsilon = 0.0012$.
c) $h(x) = x^2 - 1, x_0 = 1, \varepsilon = 0.02, \varepsilon = 0.0003$. d) $f(x) = x^2 - 3x, x_0 = 3, \varepsilon = 0.2, \varepsilon = 0.05$.

2. Usa directamente la definición de función continua para demostrar que las siguientes funciones son continuas en el punto indicado:
a)$f(x) = 3x - 5, x_0 = 1$ b) $h(x) = \frac{2x^2-1}{3x+2}, x_0 = -1$ c) $g(x) = [x], x_0 = 0.75$(función cumpleaños). d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}, x_0 = -1$.

3. Utiliza resultados sobre continuidad de funciones vistos en clase (no la definición) para determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \frac{x^2+5x-4}{x^2-5x+6}(x^4 - 3x^2 - \pi)$ b)$v(x) = \cos^2 x$
c) $h(x) = 1 + \tan^2(x)$ d)$g(x) = (\sin x)(|x| + \frac{x^7-5}{x^3})$.

4. Se dice que una función f es de *Lipschitz* si existe un número $M > 0$ tal que para toda pareja de puntos en el dominio x, y arbitraria, tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Demuestra que toda función de Lipschitz es continua en su dominio.

5. Supongamos que f es una función que cumple $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y en su dominio. Además supongamos que f es continua en 0. Demuestra que f es continua en a para todo $a \in \mathrm{Dom} f$.

6. Da una descripción en términos de ε y δ para una función que NO es continua en x_0.

7. Demuestra que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua si restrigimos su dominio a la semirecta $[a, \infty)$ con $a > 0$. (Punto extra)