TAREA 2, Cálculo I, I-2019

Entrega: miércoles 22 de agosto de 2018.

1. (a) Demuestra que si m y n son números naturales y $\frac{m^2}{n^2} < 2$, entonces $\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} > 2$. Más aún, prueba que
$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$
   (b) Demuestra que si $\frac{m^2}{n^2} > 2$, en el inciso anterior se tienen las desigualdades contrarias.
   (c) Demuestra que si $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ entonces, existe otro número racional $\frac{m'}{n'}$ con $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \sqrt{2}$.

2. Prueba que si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

3. Resuelve las desigualdades siguientes : a) $|x^2 - 2| < 1$ b) $|x - 4| > 11$ c) $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| < 4$.

4. Demuestra que si $|x - 2| < 1$, entonces $|x^2 - 4| < 5$.

5. Determina el supremo y el ínfimo en $\mathbb{R}$ de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $S = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 + 4 < 6, x > 0\}$ b) $T = \{z \in \mathbb{Q} | 3z^3 - 1 < 15, z > 0\}$
c)$U = \{t \in \mathbb{R} | t^3 + 1 \leq 3\}$ d) $P = \{\frac{1}{n} + (-1)^n | n \geq 1\}$
e) $Y = \{y \in \mathbb{R} | y = x^2 + 3x + 9, \text{ para } 2 < x < 4\}$
f) $W = \{y \in \mathbb{R} | y = \frac{2}{x^2+x-1} \text{ para } 2 < x < 4\}$. g) $U = (1, 7) \cup \{9\} \cup \{-\pi\}$.

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos, acotados superiormente. Se define
$$A + B = \{a + b | \quad a \in A, b \in B\}$$
Demuestra que
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

7. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y supongamos que s^* es su supremo. Si $u \notin S$ muestra que el supremo de $S \cup \{u\}$ es el máximo entre s^* y u.

8. Sea S un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Muestra que si $S_0 \subset S$ entonces
$$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S.$$