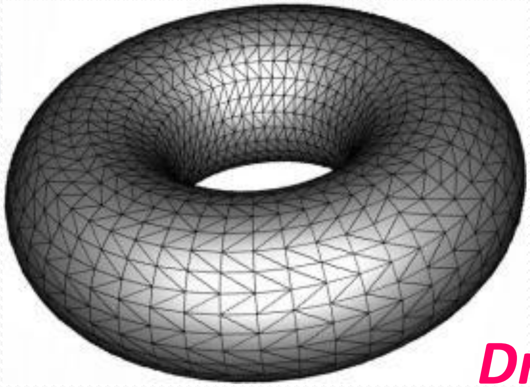
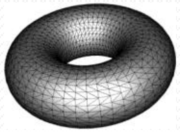
De Euclides a Poincaré

VII Festival Internacional
de Matemáticas
San Carlos, Costa Rica
16 de abril de 2010



Dr. Carlos Prieto
Investigador Titular
Instituto de Matemáticas, UNAM
http://www.matem.unam.mx/cprieto

De Euclides a Poincaré

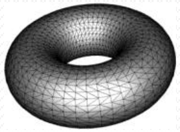


"Toda variedad cerrada tridimensional simplemente conexa es la 3-esfera".

Henri Poincaré, 1904

Jules Henri Poincaré 1854-1912

De Euclides a Poincaré



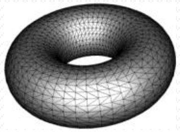
Grandes problemas de las matemáticas

Los últimos veinticinco años se han visto coronados por una serie de éxitos de las matemáticas. Muchos problemas clásicos, algunos de ellos tras siglos de haber sido planteados, han encontrado finalmente su solución. El problema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat, la conjetura de Kepler y ahora la conjetura de Poincaré, son quizás los más sonados de esos problemas clásicos. Deseamos hablar aquí del último de estos problemas resueltos. Apenas en junio de 2006 apareció la prueba de la conjetura de Poincaré, en un artículo de Cao & Zhu, de 334 páginas[1], muy probablemente con la demostración matemática más larga de la historia. Hay otro artículo de Bessieres, Besson, Boileau, Maillot y Porti, en ArXiv.org 2007, que la incluye.[2]

[1] *Asian J. Math*. **10** (2006) 165-398

[2] aceptado por *Inventiones Mathematicae* en octubre de 2009.

De Euclides a Poincaré

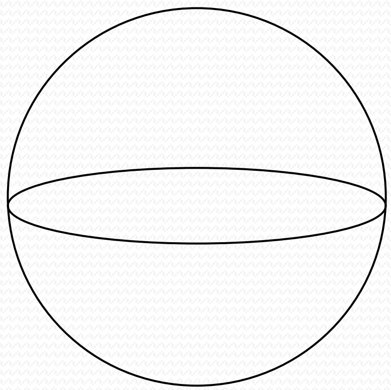


Pero, ¿qué asevera esta conjetura de Poincaré?

Para responder a esta pregunta, nos remontaremos a mediados del siglo diecinueve: Al **Teorema de clasificación de las superficies cerradas.**

Comenzaremos diciendo qué objetos son las superficies cerradas.

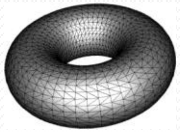
El más sencillo de estos objetos es la **esfera de dimensión 2** o, más sencillamente, la **2-esfera**:



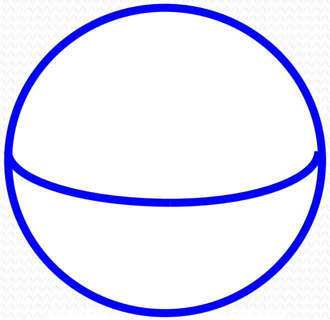
$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$$

es su ecuación en $\mathbf{R}^3$.

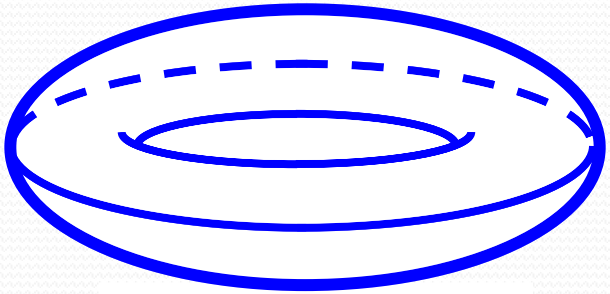
De Euclides a Poincaré



Después de la 2-esfera, la más sencilla de las superficies es el toro:



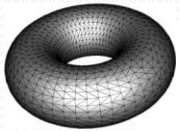
La **esfera S^2**

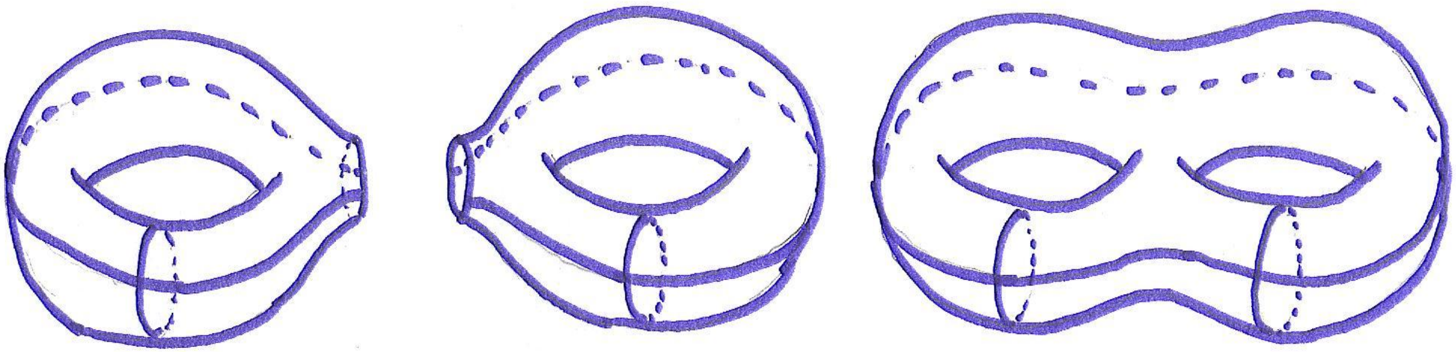


El **toro $F_1 = S^1 \times S^1$**

El toro es el bloque con el que se construyen las demás superficies cerradas a través de una operación llamada **suma conexa**.

De Euclides a Poincaré

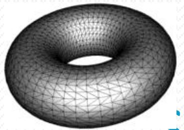




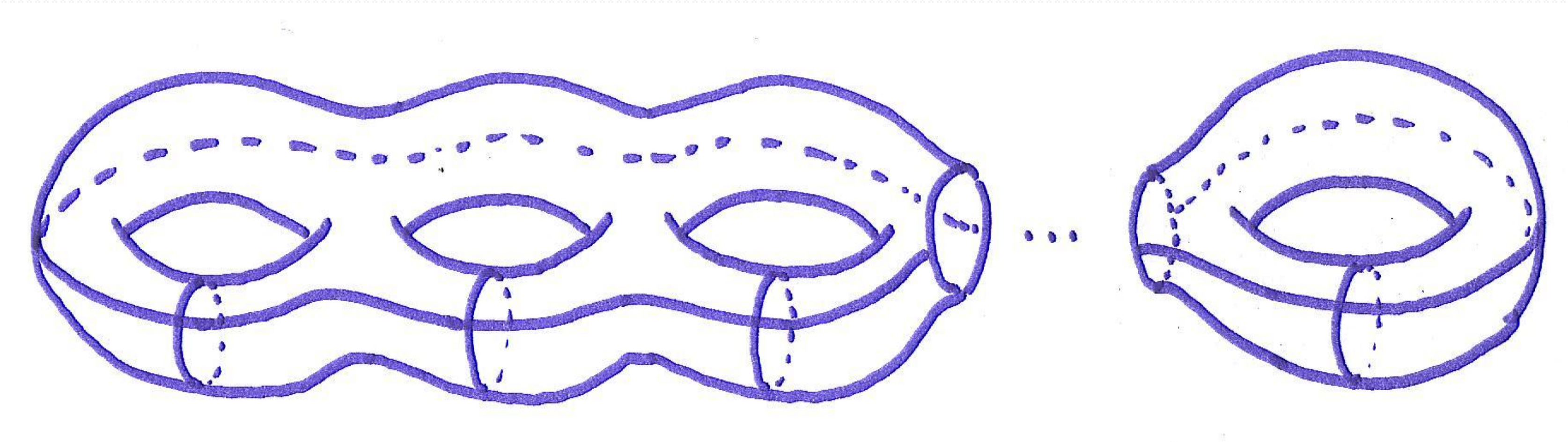
Operación **suma conexa**: $\#\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 \# \mathbf{F}_1$

La **suma conexa** consiste en tomar dos superficies cerradas, por ejemplo dos toros, y perforar en cada una de ellas un agujero. Luego se pegan los bordes del agujero para obtenerla.

De Euclides a Poincaré

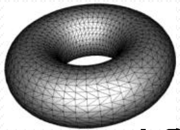


Si continuamos el proceso, podemos obtener superficies $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, ... $\mathbf{F}_g$, donde $\mathbf{F}_g$ es la **superficie orientable de género *g***:

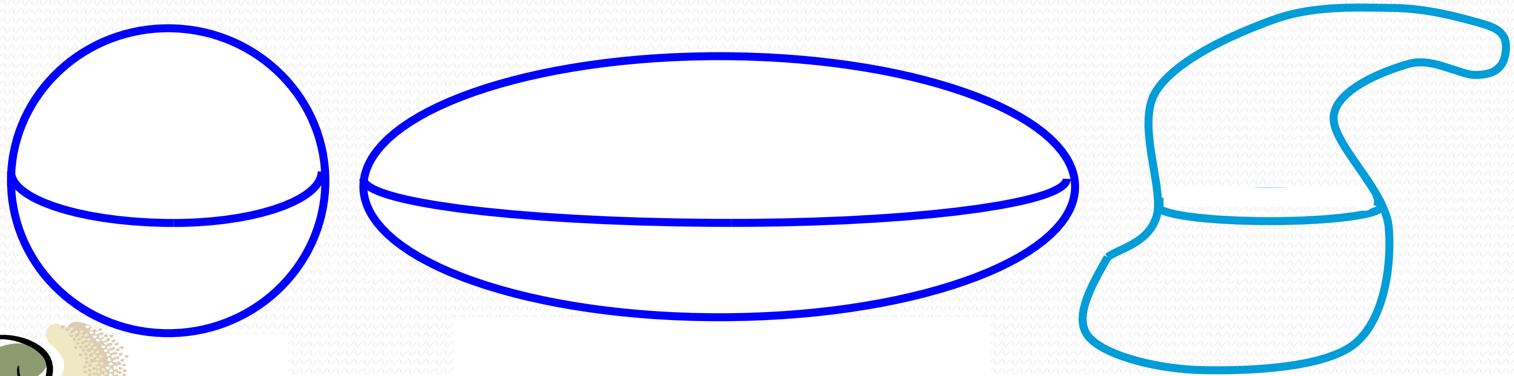


$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{g-1} \,\#\, \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1 \,\#\, \ldots \,\#\, \mathbf{F}_1$, g veces, nos da la **superficie orientable de género *g***

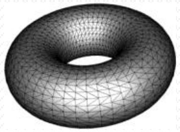
De Euclides a Poincaré



Las superficies son **objetos topológicos**. Son ellos objetos que, en la topología, no distinguimos si podemos obtener uno de ellos deformando al otro. La esfera geométrica, por ejemplo, es, como objeto topológico, lo mismo que un balón de futbol americano o que una figura más deforme como la que se aprecia a la derecha.



De Euclides a Poincaré



Veamos qué es lo que hace superficie a una superficie.

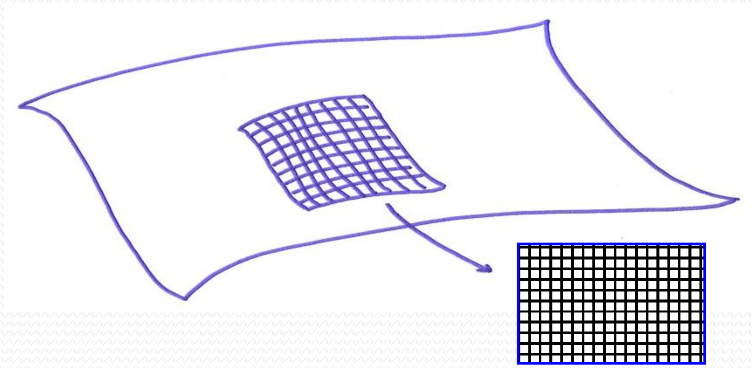
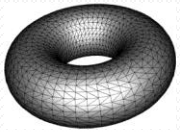


Figura 1

Una **superficie** se ve, en el entorno de cada uno de sus puntos como un plano; es decir, podemos hacer mapas, de la misma forma en la que lo hacemos en los puntos de la tierra. Ésta es la definición.
Se dice que la superficie es **cerrada** si no es infinita.

De Euclides a Poincaré

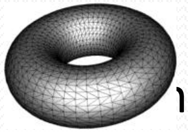


El **Teorema de clasificación de las superficies** (en el caso orientable) es uno de los resultados (1861) más importantes probados por August Ferdinand **Moebius** (*1790 Schulpforta, Sajonia, - $^{+}$1868 Leipzig, Alemania). A pesar de su relevancia, la Academia de Ciencias de París se negó a otorgarle el Grand Prix de Mathématiques ese año de 1861, declarando desierto el premio.

Teorema de Moebius: Toda superficie cerrada orientable está, salvo homeomorfismo, en la lista:

$\mathbf{S}^2, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_g, \dots$.

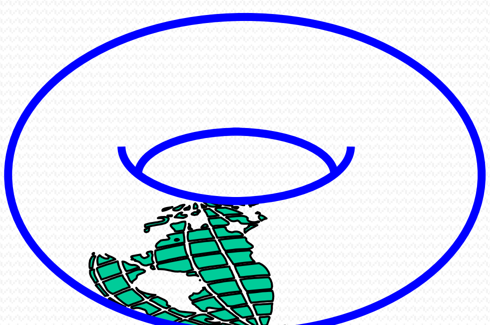
De Euclides a Poincaré



En la **Edad Media** a la tierra se la creía plana, pues, como los cartógrafos lo han mostrado con creces, localmente sí lo era.

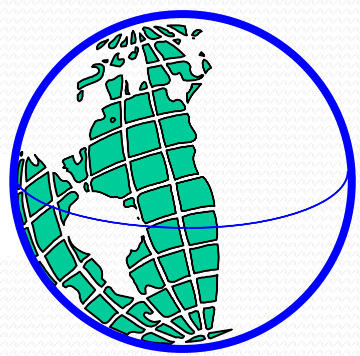
De la visión local de la superficie de la tierra y, aceptando que gira, es decir, que tiene **simetría rotacional**, **la Tierra bien podría tener la forma de un toro.**

Es decir, si buscamos un modelo para la Tierra, hemos de buscar en la lista de Moebius y, luego de hacer investigaciones físicas sobre propiedades de ella, como su simetría rotacional, se reduce la lista solamente a dos objetos: la esfera y el toro. De un análisis más fino podemos excluir a este último y concluir que se trata de una esfera.

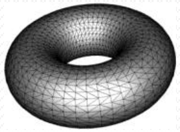


La tierra toroidal

La tierra esférica



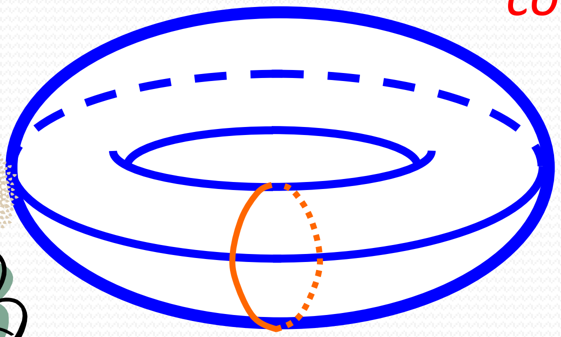
De Euclides a Poincaré



Como ya dijimos, la más sencilla de las superficies cerradas es la 2-esfera.

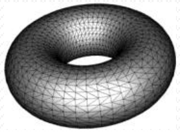
De todas las superficies cerradas, la esfera es la única que tiene la propiedad de ser **simplemente conexa**, es decir, cualquier lazo sobre ella puede contraerse a un punto.

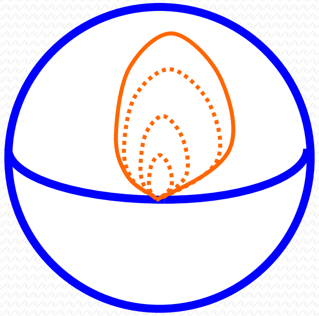
Para entender lo que este concepto significa observemos que, por ejemplo, *el toro* ***no*** *es simplemente conexo*:



El lazo rojo no puede contraerse (o deformarse) a un punto.

De Euclides a Poincaré





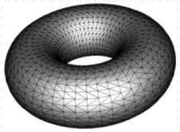
En la esfera cualquier lazo puede contraerse a un punto. No encuentra ningún obstáculo para hacerlo. En cualquier otra superficie, esto no ocurre. Podemos concluir:

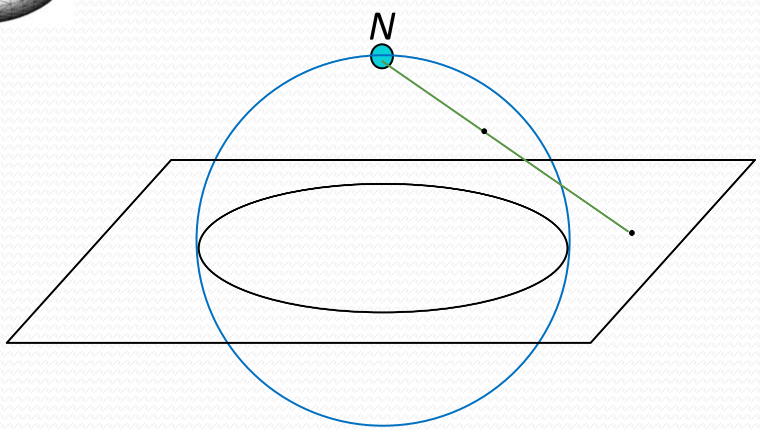
Si una 2-variedad cerrada es simplemente conexa, entonces es la 2-esfera.

Esta afirmación es la conjetura de Poincaré en dimensión 2. El propio Poincaré la demostró.

Veamos por qué la 2-esfera es simplemente conexa.

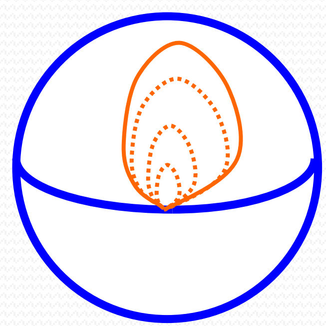
De Euclides a Poincaré

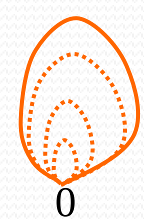




La *proyección estereográfica* muestra que al quitarle a la esfera el polo norte *N*, lo que resta es *homeomorfo* a $\mathbf{R}^2$.

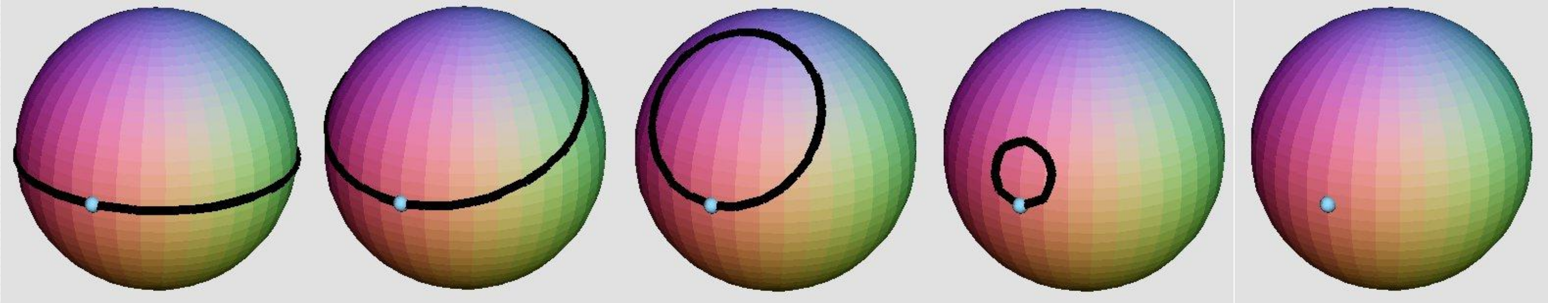
Dado un lazo en la esfera, siempre podemos deformarlo para evitar que pase por el polo norte. Así, es como si tuviésemos el lazo en el plano, donde claramente puede contraerse a un punto.





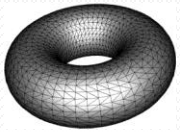
De Euclides a Poincaré

Una figura muy bonita que muestra la conexidad simple de la 2-esfera:



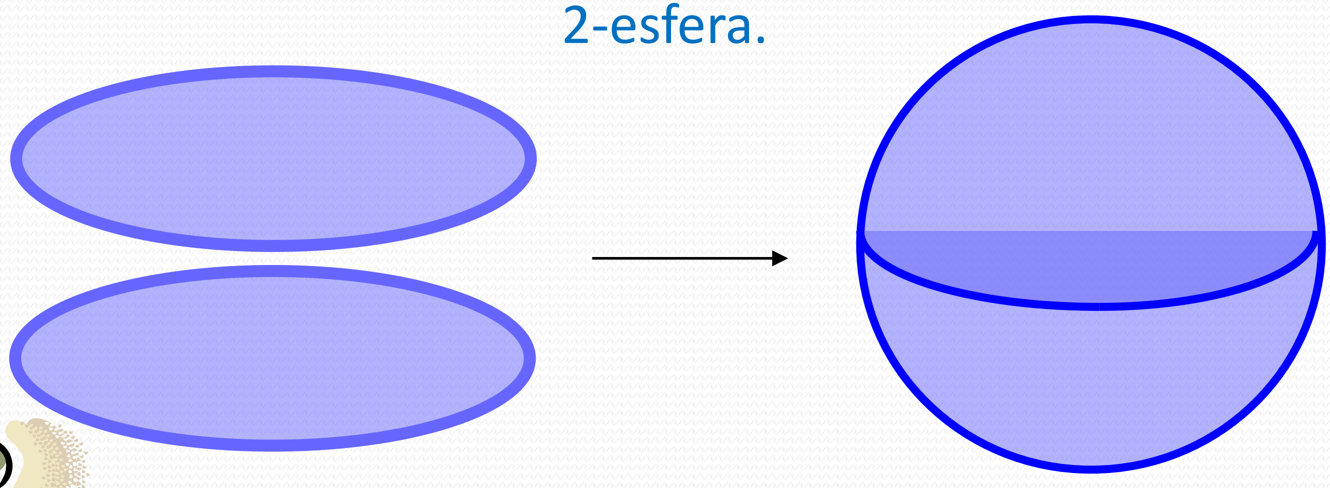
Extraída de wikipedia:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/9/9e/P1S2all.jpg

De Euclides a Poincaré



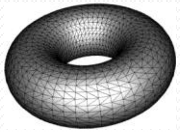
Para entender la conjetura en dimensión 3, entenderemos primeramente una posible construcción de la 2-esfera.

Imaginemos que dos discos de hule los pegamos a lo largo de sus bordes. Entonces obtenemos la 2-esfera.



Esta construcción no puede llevarse a cabo en el plano y debemos hacerla en el espacio tridimensional.

De Euclides a Poincaré

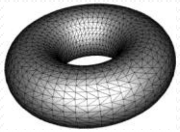


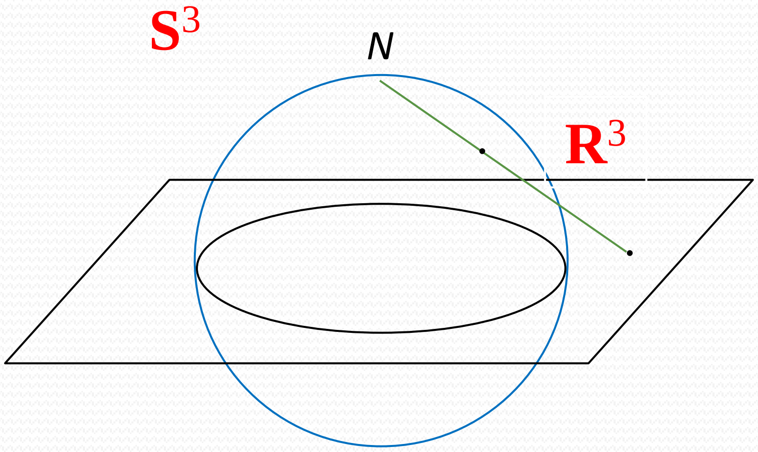
Formalmente, podemos describir a la **3-esfera** (geométrica) como todos los puntos en $\mathbf{R}^4$ que distan 1 del origen. Es decir, en fórmula:

$$\boxed{\mathbf{S}^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbf{R}^4 \mid w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}}$$

Dado que se trata de un objeto dentro del espacio de 4 dimensiones, conviene tratar de aprender a visualizarlo de algunas maneras.

De Euclides a Poincaré



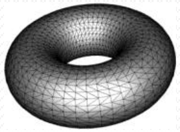


También tenemos la *proyección estereográfica* muestra que al quitarle a la 3-esfera **S**^{3} el polo norte *N*(0,0,0,1) lo que resta es *homeomorfo* a **R**^{3}

.

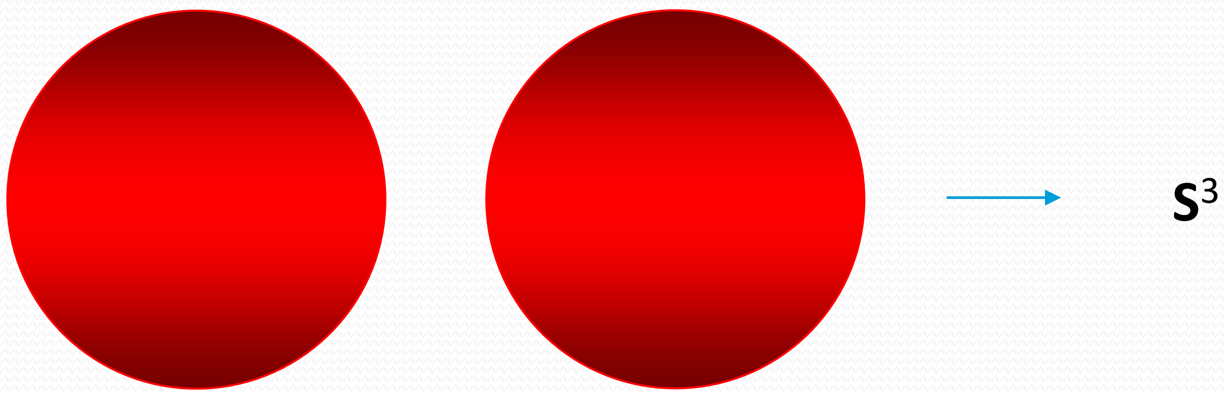
Así, podemos describir a la **3-esfera** (geométrica) como el espacio euclidiano de 3 dimensiones **R**^{3}, al que se le agrega un punto al infinito.

De Euclides a Poincaré



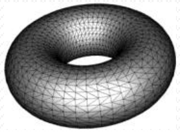
Otra construcción de la 3-esfera es análoga a la de los discos.

Tomemos ahora dos bolas sólidas de dimensión 3 (que van a corresponder a los dos discos) y peguemos, punto a punto, los puntos de sus superficies esféricas.

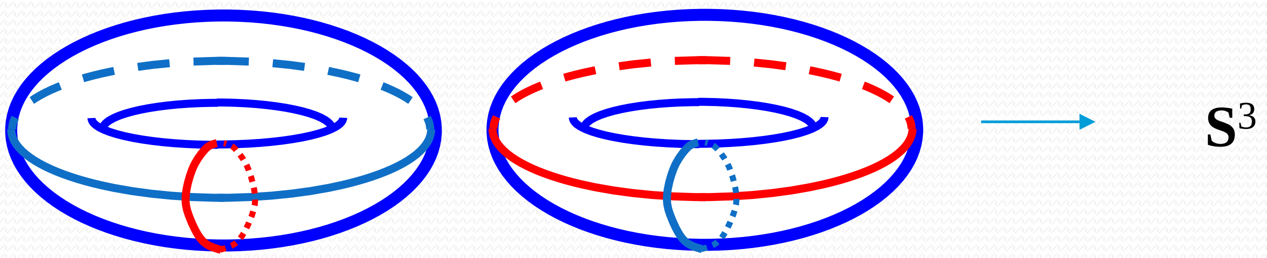


Esta construcción no puede realizarse en el espacio de dimensión 3 en que vivimos y tenemos que pensar en esta construcción en el espacio de dimensión 4.

De Euclides a Poincaré



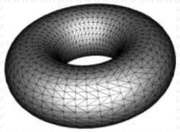
Hay otras posibles construcciones de la 3-esfera:
Ensamblando dos toros sólidos, meridianos con paralelos:



Después del propio espacio euclidiano de dimensión 3, es $\mathbf{S}^3$ la variedad de dimensión 3 más simple. Por su construcción es, además, **una 3-variedad cerrada**. También es claro que en ella, todo lazo puede contraerse:

La 3-esfera es una 3-variedad cerrada simplemente conexa.

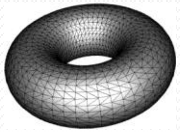
De Euclides a Poincaré



Cualquier lazo en $\mathbf{S}^3$ puede deformarse para que no pase por el polo norte *N*, por lo que puede verse como un lazo en el espacio. Por su construcción, la 3-esfera es, además, **una 3-variedad cerrada**. También es claro que en ella, todo lazo puede contraerse. Podemos concluir así que:

La 3-esfera es una 3-variedad cerrada simplemente conexa.

De Euclides a Poincaré

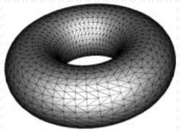


Henri Poincaré, en 1904, conjeturó que, al igual que en el caso de dimensión 2, el inverso de esta última afirmación también es válido.

Si una 3-variedad cerrada es simplemente conexa, entonces es la 3-esfera.

Una posible ruta para la prueba de esta afirmación sería dar la clasificación de las 3-variedades cerradas. Éste, sin embargo es un problema abierto, cuya solución se ve aún muy lejana.

De Euclides a Poincaré



Han sido muchos los matemáticos que intentaron probar, con poco éxito, esta conjetura; quizá no hayan tenido el enfoque adecuado para el problema.

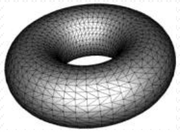
El enfoque exitoso que llevó a la prueba, a pesar del carácter topológico de la conjetura, es un enfoque geométrico. Dos son las palabras claves que caracterizan este enfoque:

Geometrización

Flujo de Ricci

Explicaremos, de manera bastante vaga, estos conceptos. Antes, veamos quién es el que logró hallar esta demostración.

De Euclides a Poincaré



El artífice de la intrincada prueba de la conjetura es el joven matemático ruso

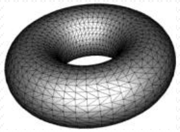
Grigory Perelman

Entre 2002 y 2003 –a casi cien años de la formulación de la conjetura– colocó en la red de internet una serie de tres artículos que contiene la esencia de la prueba.

Obtiene la conjetura de Poincaré como un caso especial de una conjetura muy general, debida a **William Thurston**, llamada ***conjetura de geometrización***.

La poderosa herramienta que utiliza para demostrarla se le debe a **Richard Hamilton**, y se conoce como ***flujo de Ricci***.

De Euclides a Poincaré

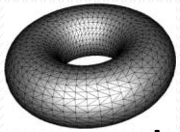


Trataremos de entender estos términos. Para ello, nos remontaremos muy atrás en la historia, a uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Euclides

En su magna obra, ***Los Elementos***, consistente en trece libros, establece los elementos básicos sobre los que se construyeron las matemáticas que lo siguieron.

De Euclides a Poincaré

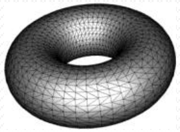


La Geometría, en ***Los Elementos***, comienza con cinco postulados: El primero establece la posibilidad de dibujar una recta entre cualesquiera dos puntos. Análogamente, los postulados dos y tres, hablan sobre producir rectas y trazar círculos, y suponen la unicidad de los objetos cuya construcción postulan.

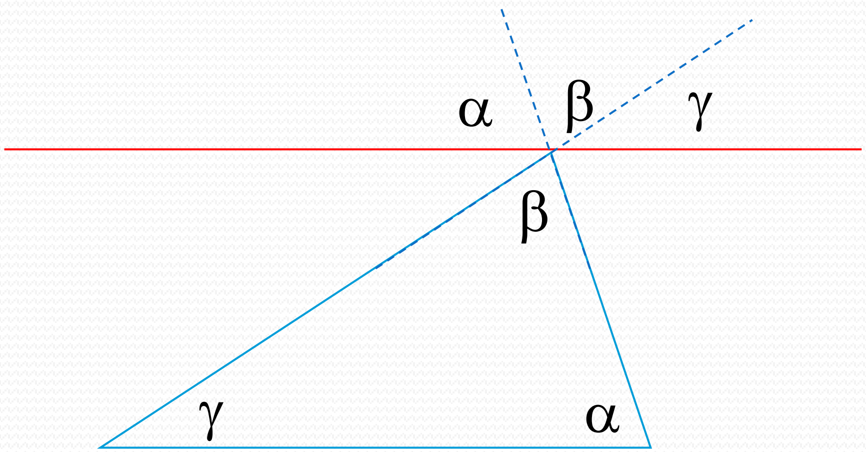
El cuarto postulado es de naturaleza diferente: Establece que todos los ángulos rectos son iguales.

Finalmente, el **quinto postulado** establece que *puede dibujarse una y sólo una recta que pase por un punto y sea paralela a una recta dada*.

De Euclides a Poincaré

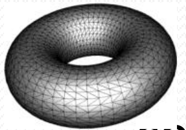


Una consecuencia de este postulado es que los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo llano, es decir, 180°.



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

De Euclides a Poincaré



La decisión de Euclides de formular este postulado fue lo que condujo a la geometría euclidiana. No fue hasta el siglo diecinueve que, al verificarse que no es consecuencia de los otros, se eliminó este postulado y se estudiaron las llamadas **geometrías no euclidianas**.

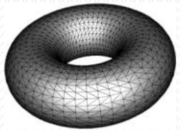
El ejemplo más sencillo de una geometría no euclidiana es la **geometría de la esfera**.

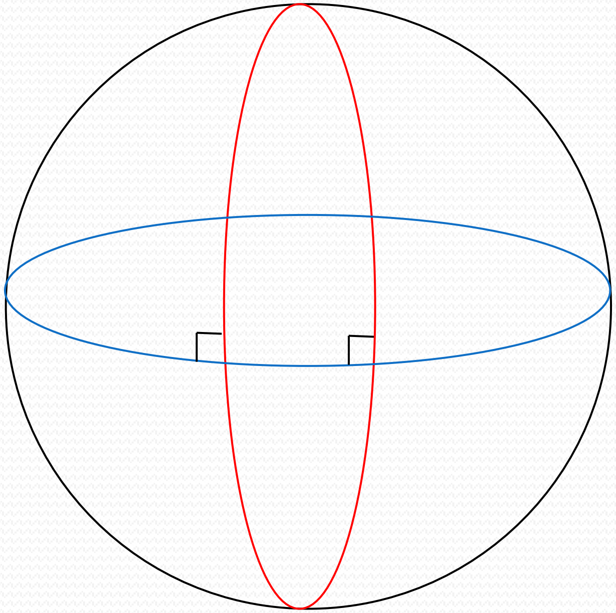
En la esfera unitaria no se cumple el postulado de las paralelas.

En este caso, las líneas rectas son las llamadas **geodésicas**, es decir, los **círculos máximos.**

En el polo norte se encuentran una infinidad de meridianos y todos ellos forman un ángulo recto con el ecuador, mas no son paralelos, pues se cortan.

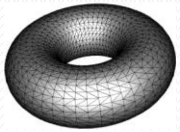
De Euclides a Poincaré



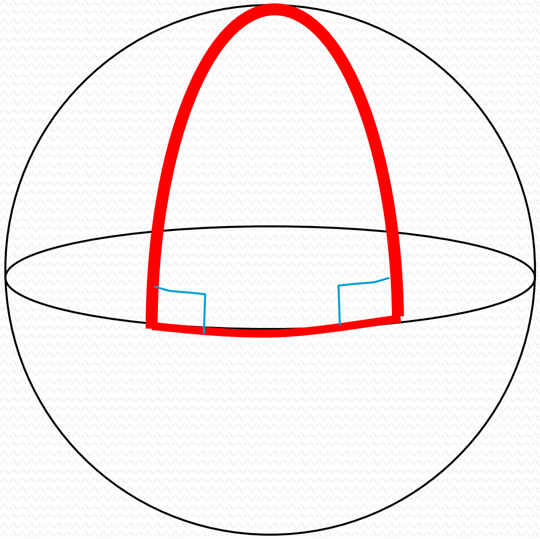


En la 2-esfera, cualesquiera dos meridianos forman un ángulo recto con el ecuador, pero, en la geometría esférica, no son paralelos. Una infinidad de ellos pasa por el polo.

De Euclides a Poincaré

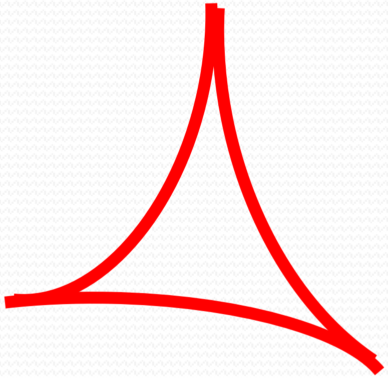


En la esfera, los ángulos interiores de un triángulo suman siempre más de 180°.



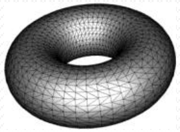
Por ejemplo, en la figura de la izquierda, los dos ángulos inferiores del triángulo rojo ya suman 180°.

Cuando esto ocurre en una variedad, se dice que tiene **curvatura positiva**.



Hay variedades con **curvatura negativa**; en ellas, los triángulos se ven como en la figura de la derecha.

De Euclides a Poincaré

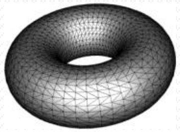


En el caso de las superficies:
La esfera tiene curvatura positiva.
El toro tiene curvatura (total) cero.
Las demás superficies tienen curvatura negativa.

La esfera es la **única** que tiene curvatura positiva.

La **esfera geométrica** tiene **curvatura positiva constante**.
(es igual en cada punto)

De Euclides a Poincaré



La conjetura de geometrización de Thurston afirma que toda 3-variedad puede geometrizarse; es decir, entre otras cosas, puede dársele una función de curvatura.

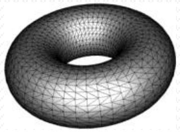
Esta conjetura pasa de la **topología** a la **geometría**.

Más específicamente, lo que la conjetura de Thurston afirma es que toda 3-variedad puede descomponerse en pedazos que son, ya sea, como la 3-esfera o el 3-toro.

Estos bloques admiten ocho geometrías distintas:

La de **S^3, R^3, H^3, $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, $SL_2(R)^{\text{universal}}$, la nilgeometría** y **la solgeometría**

De Euclides a Poincaré

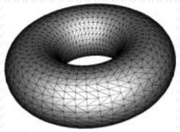


Bajo las hipótesis de la conjetura de Poincaré, es decir, suponiendo que se tiene una 3-variedad **simplemente conexa,** la conjetura de Thurston implica que la 3-variedad tiene la geometría de **S**^{3} y por tanto debe ser la **3-esfera.**

Lo que había que hacer, entonces, era probar la conjetura de geometrización.

La herramienta principal para poder abordar la prueba de la conjetura de geometrización es el **flujo de Ricci**. Éste es un concepto geométrico que desarrolló Richard Hamilton.

De Euclides a Poincaré



Técnicas muy complicadas que hacen uso del **flujo de Ricci** llevaron a Grigory Perelman a demostrar la conjetura de Thurston, y con ello, la conjetura de Poincaré.

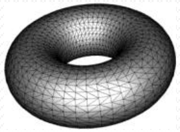
El flujo de Ricci permite deformar la geometría y conduce a minimizar la curvatura. Esto resulta en que, si la 3-variedad es simplemente conexa, entonces admite una curvatura (mínima) positiva constante.

La única 3-variedad que admite una curvatura positiva constante es la 3-esfera.

Así:

La única 3-variedad simplemente conexa es la 3-esfera.

De Euclides a Poincaré

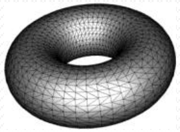


De esta manera quedó establecida la conjetura de Poincaré. No obstante, en los trabajos de Perelman, sólo aparecen muy bien estructuradas las herramientas para probar la conjetura de geometrización y las líneas generales para la prueba, pero no se menciona la conjetura de Poincaré.

Dos matemáticos chinos, Cao & Zhu (Asian J. Math. **10** (2006) 165-398), por sugerencia de Yao, pusieron en todo el detalle los pasos restantes para armar la prueba completa.

Desafortunadamente, esto no ocurrió sin algunas controversias.

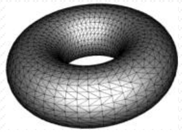
De Euclides a Poincaré



A Perelman le fue otorgada la Medalla Fields, que hoy por hoy es el máximo galardón al que puede aspirar un matemático (menor de 40 años).
La medalla fue presentada en septiembre de 2006 por el Rey Juan Carlos I de España, en la ceremonia inaugural del Congreso Internacional de Matemáticos realizado en Madrid.

Perelman se rehusó a aceptarla. Ni siquiera quiso salir de su ciudad, San Petersburgo, para ir a Madrid.
De hecho, ya desde antes, en diciembre de 2005 había renunciado a su cargo de profesor del Instituto Steklov de San Petersburgo.

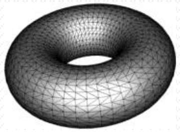
De Euclides a Poincaré



Perelman considera que el mejor premio al que un matemático puede aspirar es intrínseco al resultado probado.
Haber probado la conjetura de Poincaré ya fue un premio para Grisha Perelman.

El **Instituto Clay** de los Estados Unidos, ha establecido un premio de **un millón de dólares** para quien pruebe uno de una lista de siete **problemas del milenio**. Uno de ellos es precisamente
La Conjetura de Poincaré.
En marzo le fue otorgado a Perelman.

De Euclides a Poincaré



Problemas del Milenio

P versus NP

La conjetura de Hodge

La conjetura de Poincaré

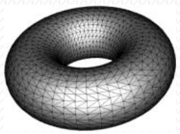
La hipótesis de Riemann

La existencia de Yang-Mills

La existencia de Navier–Stokes

La conjetura de Birch y Swinnerton Dyer

¡El pasado 18 de marzo de 2010 se le otorgó a Grisha Perelman el primer millón de dólares! ¿Y éste lo aceptará?



FIN

¡Muchas gracias!

Dr. Carlos Prieto

Investigador Titular

Instituto de Matemáticas, UNAM

http://www.matem.unam.mx/cprieto