Conquistando terrenos y haciendo pompas de jabón

Carlos Prieto de Castro

Universidad Nacional Autónoma de México

2° Encuentro con los números

Envigado, Antioquia, Colombia

19 de octubre de 2013

http://www.matem.unam.mx/cprieto

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

El origen de Cartago

http://ian.classics.unc.edu

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

La fundación de Cartago

En el siglo noveno antes de nuestra era, la ciudad fenicia de Tiro, en el Oriente Medio, tenía un rey llamado Belus. Belus tenía dos hijos, la hermosa princesa Dido y el famoso Pigmalión.

A la muerte de Belus, Pigmalión asumió el reinado. Cuenta la leyenda que Dido se había casado con un acaudalado hombre llamado Siqueo, a quien Pigmalión asesinó para robar sus riquezas.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

El fantasma de Siqueo se le apareció a Dido para contarle los trágicos acontecimientos, decirle dónde tenía escondido su tesoro y pedirle que lo buscara y, llevándoselo, abandonara Tiro. Así, Dido decidió partir, encabezando una flota de naves, todas bien cargadas del oro y la plata que había recibido de Siqueo.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Atravesó el Mediterráneo en busca de nuevas tierras en donde asentarse. Finalmente arribó a un sitio en el norte de África, muy cerca de la actual ciudad de Túnez. Reinaba ahí Iarbas, a quién le compró un pedazo de tierra junto al mar. Acordó con Iarbas que, por el dinero pagado, podría fundar su ciudad en la porción de tierra que pudiera rodear con la piel de un buey, que el propio Iarbas le había obsequiado, confiado en que con una piel de vaca sería poco lo que Dido podría rodear.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

No obstante, Dido cortó la piel en tiras mucho muy angostas, que unió cuidadosamente para formar una larga tira y con ella ceñir un gran espacio; el mayor que fuese posible. En él fundó la ciudad de Cartago de la cual se convirtió en reina.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

http://homepage.mac.com/cparada/GML/Dido.html

Dido medita sobra la forma que deberá tener su terreno para obtener la mayor área posible, donde poder fundar su grandiosa ciudad.

¿Habría formado un triángulo? De ser así, ¿sería éste equilátero o rectángulo? ¿O habría quizá formado un rectángulo? ¿Pero de qué proporciones? ¿Quizás habrá sido un semicírculo? ¿O un círculo?

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Problema

Si tenemos un cordón con el que deseamos rodear una cierta superficie, ¿qué forma debemos darle a ésta para que aquél encierre la mayor área posible?

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Conjuntos convexos

Se dice que una figura plana es una **figura convexa** si tiene la siguiente propiedad: Si tomamos dos puntos cualesquiera dentro de la figura, entonces todos los puntos del segmento rectilíneo que los une a ambos también están dentro de ella.

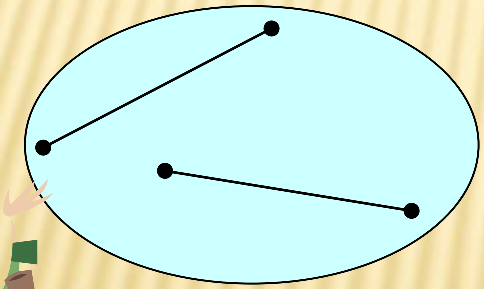
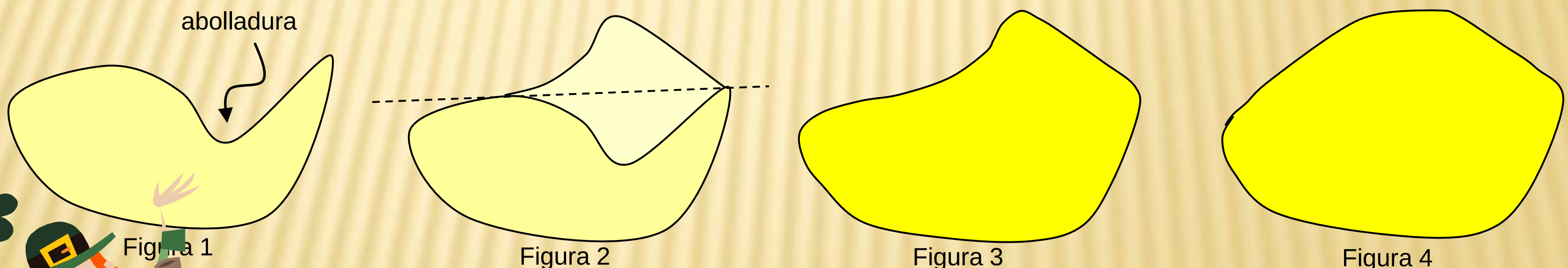


Figura convexa
Figura 5

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Cualquier solución del problema isoperimétrico debe ser una figura convexa



EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Paralelogramos isoperimétricos

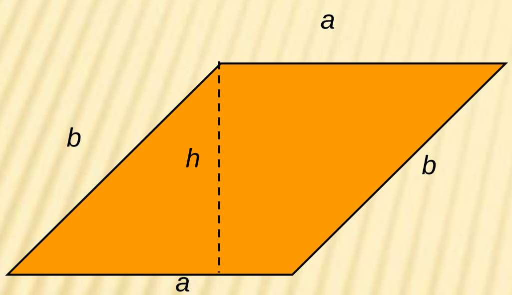


Figura 8

De la siguiente secuencia de figuras, es claro que el paralelogramo de mayor área es el rectángulo.

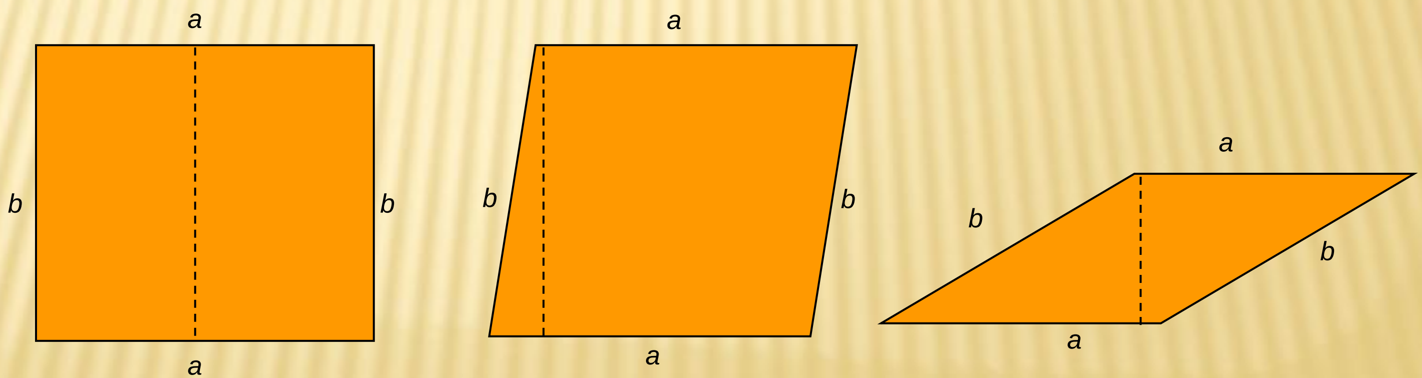


Figura 9

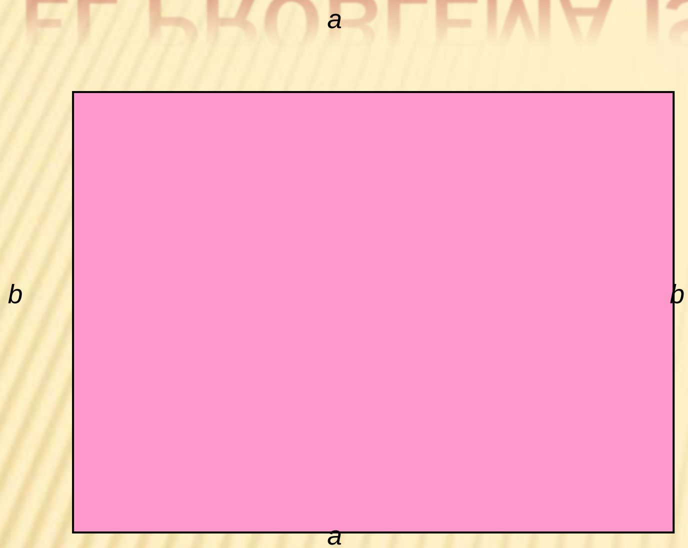
EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Teorema. *De entre todos los paralelogramos con lados a y b, el rectángulo es el que tiene mayor área.*

Esta área es

$A = ab.$

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO



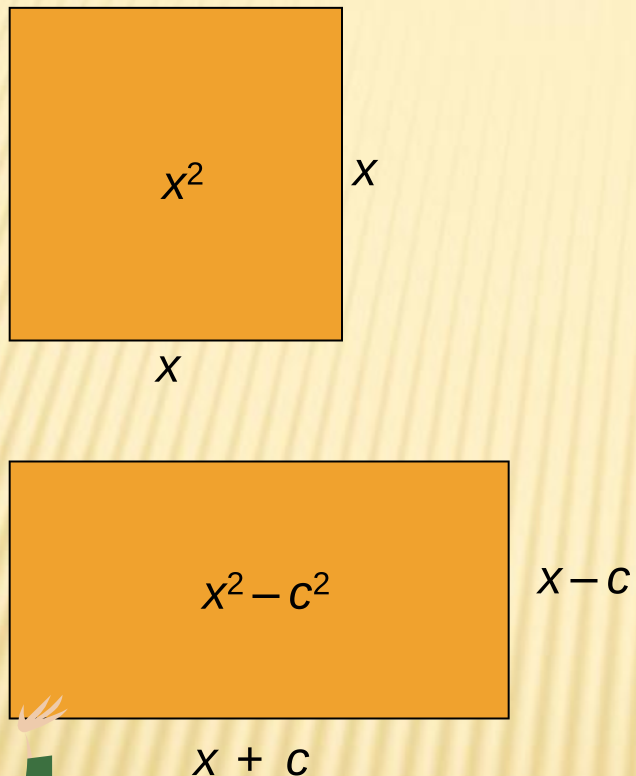
Si tenemos un rectángulo de base a y altura b, su área está dada por

$$A = ab$$

y su perímetro por $P = 2(a + b)$. Si llamamos $x = (a + b)/2$, *entonces podemos suponer*

$$a = x + c, \qquad b = x - c$$

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO



Así, el cuadrado de lado x y el rectángulo de lados $x + c$ y $x - c$ tienen igual perímetro, y sus áreas son

x^2 y

$(x + c)(x - c) = x^2 - c^2$,

respectivamente.

Así, el área es máxima si $c = 0$.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

En general, el máximo es para

$a = P/4$

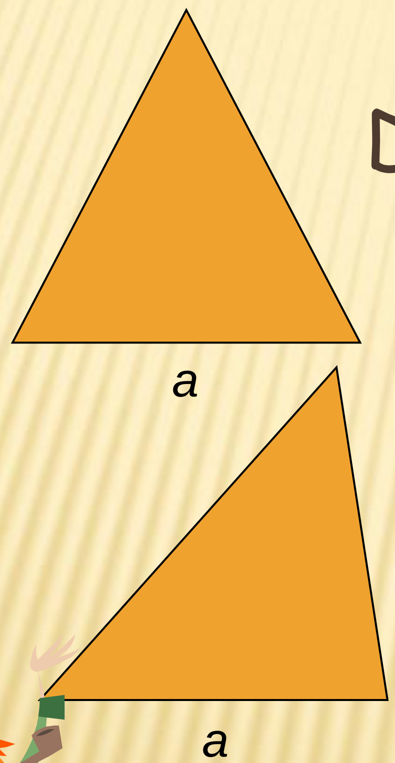
Así, obtenemos

Teorema. *De todos los paralelogramos isoperimétricos, es el cuadrado el que tiene área máxima. Si el perímetro es* P, *entonces esta área es*

$$A = P^2/16 = 0.0625\, P^2.$$

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Para triángulos se procede de forma análoga, con una función.



De dos triángulos isoperimétricos de igual base, es el isósceles el que tiene mayor área. Y de los triángulos isósceles isoperimétricos, es el equilátero el que tiene la máxima área.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

En general, para polígonos de n lados tenemos:

Teorema. *De entre todos los polígonos con n lados y con perímetro P, es el regular el que tiene mayor área.*

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Para polígonos, en general, tenemos:

Teorema. *De entre dos polígonos regulares con perímetro P, es el de mayor número de lados el que tiene mayor área.*

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Polígono regular	*Área en términos del perímetro P*
Cuadrado (4 lados)	0.0625 P^2
Pentágono (5 lados)	0.0688 P^2
Hexágono (6 lados)	0.0722 P^2
Heptágono (7 lados)	0.0742 P^2
Octágono (8 lados)	0.0754 P^2
Nonágono (9 lados)	0.0763 P^2
Decágono (10 lados)	0.0769 P^2
Endecágono (11 lados)	0.0774 P^2
Dodecágono (12 lados)	0.0778 P^2
13-gono (13 lados)	0.0780 P^2
14-gono (14 lados)	0.0782 P^2

Tabla 1

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Solución del problema isoperimétrico

Dado que cada vez que tengamos un polígono con n lados y perímetro P, el que tiene $n + 1$ lados y el mismo perímetro tiene más área, no puede haber un polígono que tenga área máxima. De cierta forma, la única posibilidad es pensar en un polígono regular que tenga un “número infinito” de lados. Éste sólo puede ser el círculo, que es el ‘límite’ de los polígonos regulares cuando el número de lados tiende a infinito.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Si el perímetro de un círculo es P, entonces el radio debe ser $r = P/2\pi$; por lo tanto, el área debe ser

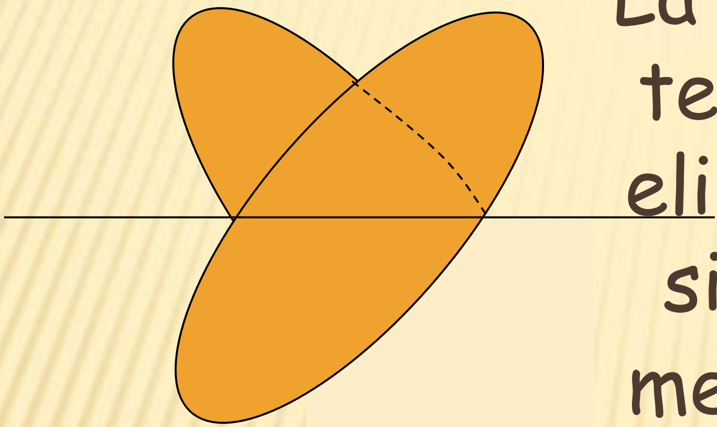
$$A = \pi r^2 = \pi(P/2\pi)^2 = P^2/4\pi = (1/4\pi)P^2 =$$
$$= 0.0796\, P^2.$$

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Teorema. *De todas las figuras planas con el mismo perímetro P, es el círculo la que tiene mayor área. Ésta es*

$$A = 0.0796\, P^{2}.$$

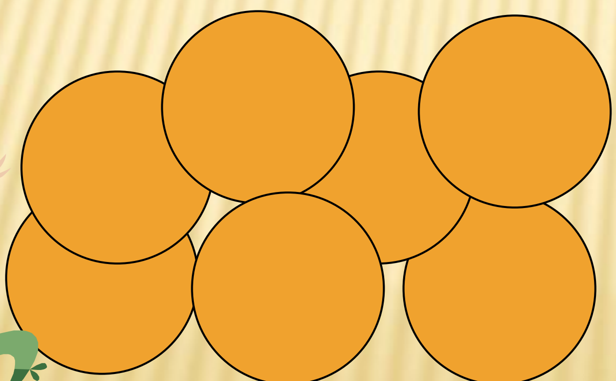
EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO



La figura muestra que si tenemos una familia de elipses isoperimétricas, si los ejes mayor a y menor b son distintos, entonces el área no puede ser máxima. Ya que el área es $A = \pi ab$ y el perímetro es $P = \pi(a + b)$, el mismo argumento de los rectángulos prueba que de entre las elipses isoperimétricas, el círculo tiene área máxima.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN EL ESPACIO.

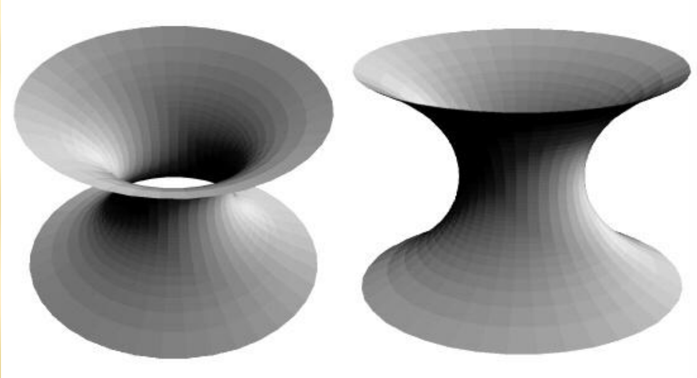
La naturaleza resuelve el problema isoperimétrico en el espacio, aplicando el principio de mínima energía. Un ejemplo son las pompas de jabón.



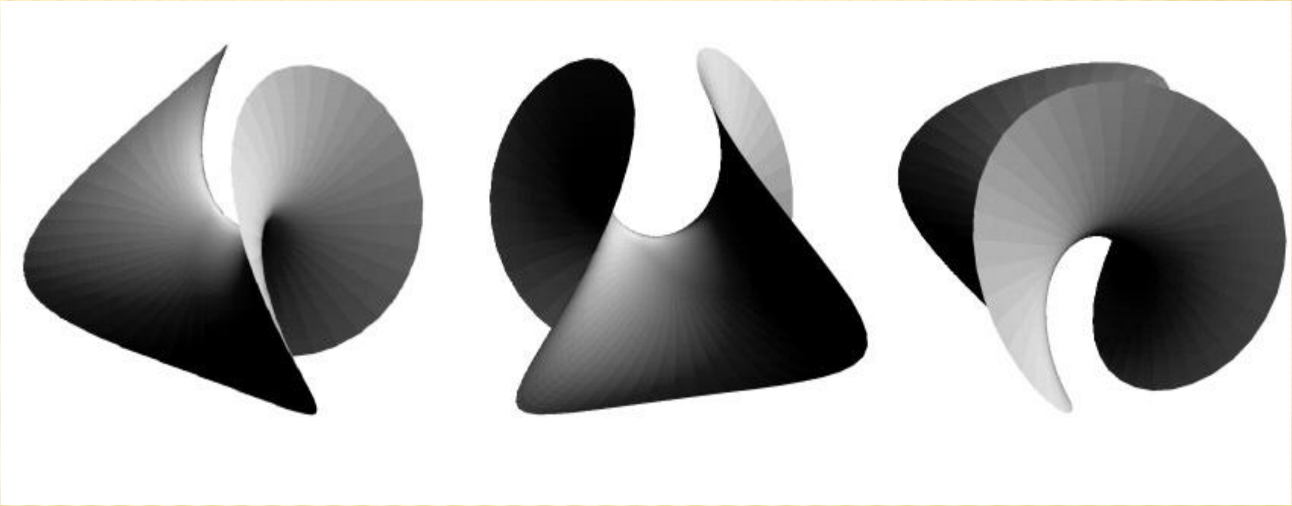
La forma esférica, es de mínima energía y de máximo volumen.

EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN EL ESPACIO.

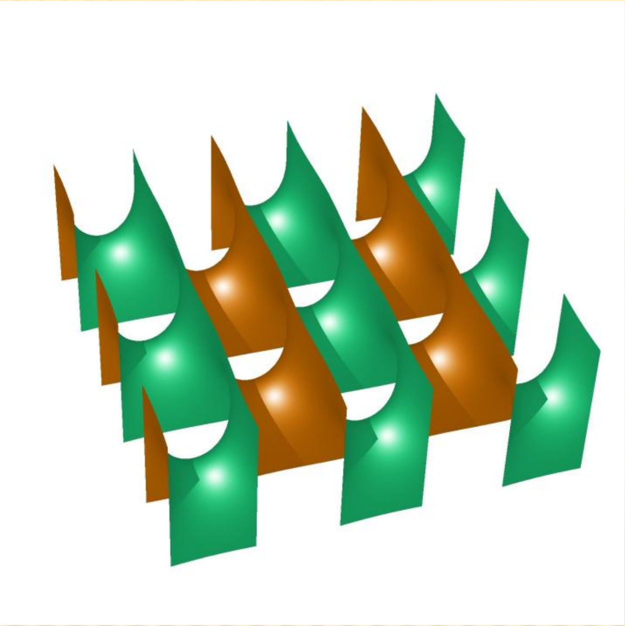
Las superficies mínimas son ejemplos de superficies de área mínima con un perímetro determinado:

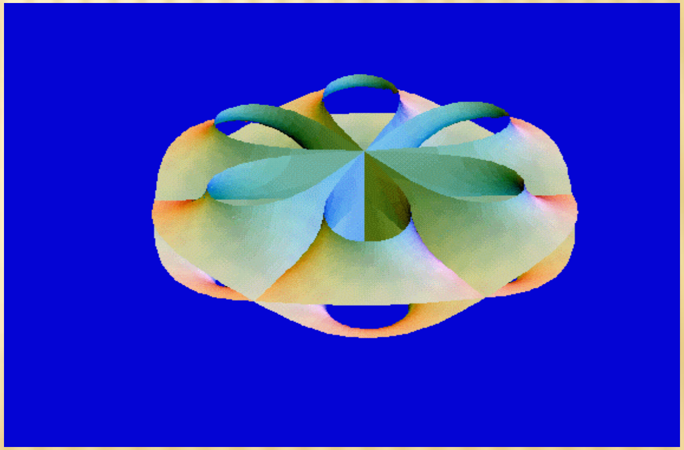


EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN EL ESPACIO.



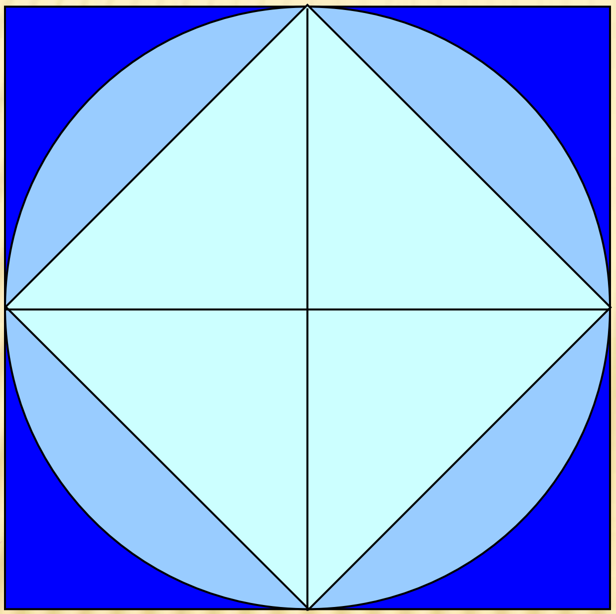
EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN EL ESPACIO.





EL ÁREA DE UN CÍRCULO

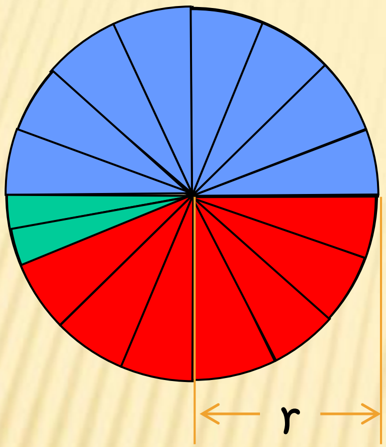
El área de un círculo – la prueba del tiburón

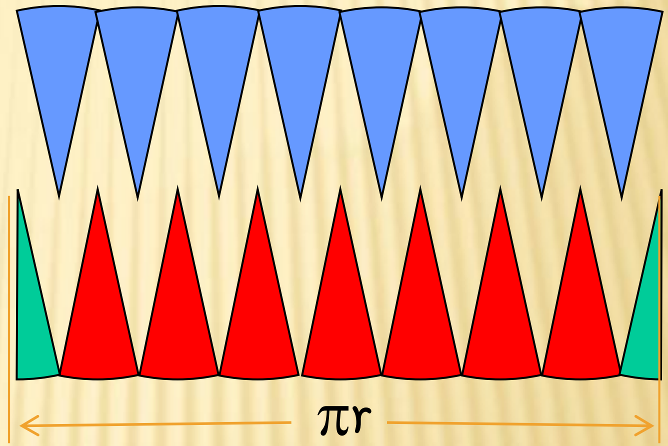


- Círculo de radio 1 (o r)
- Cuadrado inscrito de área 2 (o $2r^2$)
- Cuadrado circunscrito de área 4 (o $4r^2$)

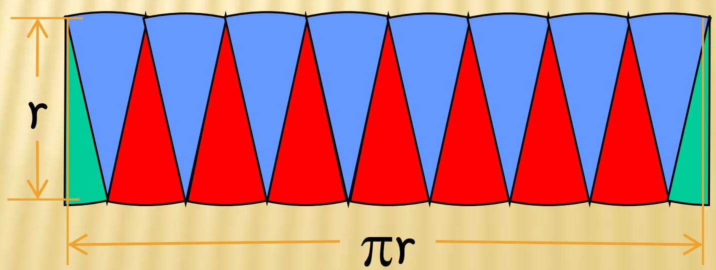
El área del círculo debe estar entre 2 y 4 (o entre $2r^2$ y $4r^2$).

EL ÁREA DE UN CÍRCULO



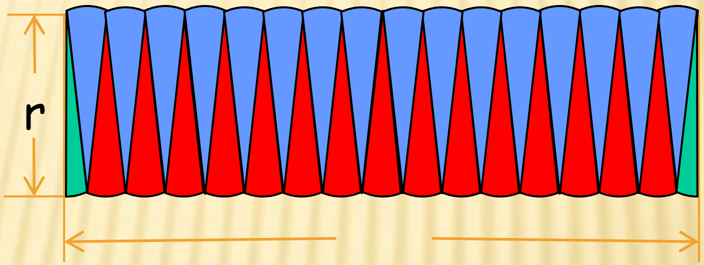


Transformamos el círculo en (casi) un rectángulo de base πr y altura r:



EL ÁREA DE UN CÍRCULO

Si cada vez tomamos los gajos más y más angostos, la figura se parece más y más a un rectángulo de base πr altura r:




Arquímedes

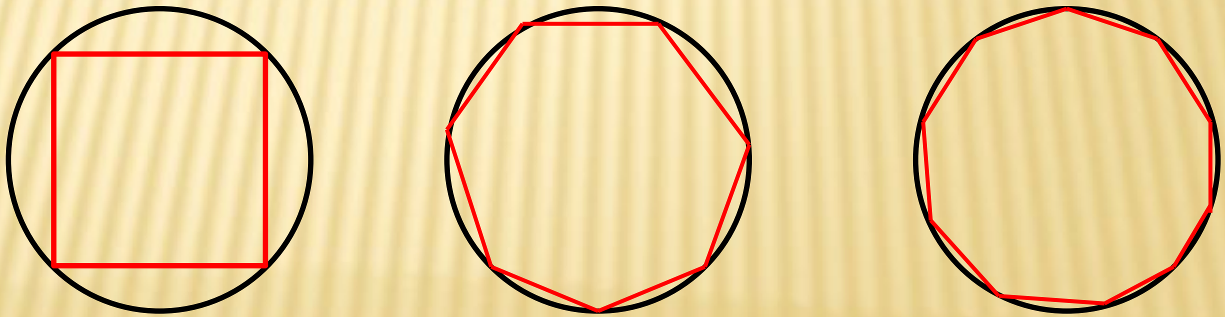
Así, en el **límite**, el área del rectángulo se vuelve

$$\pi r \cdot r = \pi r^2$$

EL MÉTODO EXHAUSTIVO DE ARQUÍMEDES

La idea de la demostración anterior –la prueba del tiburón- se remonta a Arquímedes, quien creó el método de exhaución o método exhaustivo, e ideas parecidas como la de ir aproximando un rectángulo por sectores circulares cada vez más angostos.

Arquímedes también lo hizo así:



...nunca seré abogado si no comprendo lo que significa demostrar. Salí de Springfield y regresé a casa de mi padre, de donde no salí hasta que hube demostrado cada proposición de cada uno de los seis libros de Euclides. Entonces supe el significado de demostrar y regresé a mis estudios de leyes.

Abraham Lincoln

¡MUCHAS GRACIAS!