Los números primos
- hechos y conjeturas

Carlos Prieto de Castro
Universidad Nacional Autónoma de México

2º Encuentro con los números
Envigado, Antioquia, Colombia, 18 de octubre de 2013

http://www.matem.unam.mx/cprieto

Matemáticas y la cultura general

La contribución de las matemáticas, como materia escolar, a la cultura general, consta esencialmente de dos aspectos fundamentales. Por un lado, el pensamiento matemático surge del afán del espíritu humano de concebir cuantitativamente su entorno: comparar, contar, medir y dibujar son actividades que se han desarrollado en todas las culturas del mundo.

Matemáticas y la cultura general

Por otro lado siempre se ha tenido la ambición de explorar interrelaciones, de reconocer estructuras, de hacer abstracciones, sin más objetivo que el conocimiento mismo. Con la interacción entre las matemáticas "puras" y las "aplicadas", se ha ido construyendo a través de los siglos el edificio matemático como un logro cultural común de todos los pueblos.

Matemáticas y la cultura general

Las ciencias exactas utilizan el lenguaje y los cálculos de las matemáticas; en muchos ámbitos del pensamiento humano, es indispensable el trabajo con modelos matemáticos de la realidad. Así, las matemáticas crean las condiciones para orientar el pensamiento y la capacidad de juicio en un mundo muy complicado.

Los números primos

Consideremos los números

2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,…

Faltan, aparte de los pares el 1 y el 2, los números 9, 15, 21, 25, 27,… No cuesta trabajo percatarse de que los impares que faltan son los múltiplos de 3, los de 5, los de 7, los de 11,…, es decir, faltan los múltiplos de los números que sí aparecían.

Los números primos

- Se dice que un número es *primo* si es mayor que 1 y sólo puede dividirse entre sí mismo y entre 1, es decir, si no admite ningún otro número que lo divida.
- Equivalentemente, *un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores distintos: 1 y él mismo.*
- Si un número no es primo, se llama *compuesto*.

Los números primos

- Los números primos son los ladrillos con los que se arman todos los demás números naturales.

  Es decir, *cualquier número natural es producto de números primos*, por ejemplo:

- $4 = 2\cdot 2$, $6 = 2\cdot 3$, $8 = 2\cdot 2\cdot 2$, $9 = 3\cdot 3$, $10 = 2\cdot 5$,

  $12 = 2\cdot 2\cdot 3$, $14 = 2\cdot 7$, $15 = 3\cdot 5$, $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$,

  $18 = 2\cdot 3\cdot 3$, etc.

Los números primos

Teorema fundamental de la aritmética

Dado cualquier número natural n, éste puede expresarse en forma única como un producto

$$n = p_1 \cdots p_k$$

donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos tales que

$$p_1 \leq \cdots \leq p_k$$

Los números primos

Las primeras preguntas que surgen respecto de la colección de los números primos son:

1. ¿Cuántos hay? ¿hay un número finito de ellos o, por el contrario, hay una infinidad?
2. ¿Cuántos primos hay entre 1 y n?
3. ¿Cómo saber si n es primo?
4. ¿Cómo generar todos los primos $< n$?

Los números primos

En Los Elementos de Euclides (300 aC) se prueba:

Teorema. *Hay una infinidad de números primos.*

Dem. Supongamos que el teorema fuese falso y, por lo tanto, que sólo tuviéramos un número finito de ellos (tal vez muchísimos). Denotémoslos con $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Consideremos ahora el número

$$K = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1,$$

que es mayor que todos los primos que tomamos y, por tanto, debe ser compuesto.

Los números primos

Si ahora tomamos cualquiera de los números primos, digamos p_i, donde i es alguno de los índices entre 1 y n, y dividimos k entre p_i, nos queda siempre un residuo de 1, es decir, k no es divisible entre ninguno de los primos más pequeños y, por tanto, debe ser primo. Esto es contradictorio, pues ya habíamos tomado todos los primos. ■

Los números primos

Pasaron 1900 años sin que nada ocurriera, hasta que llegó Pierre de Fermat.

Pequeño teorema de Fermat

Dado cualquier número natural n, y cualquier número primo p, entonces

$$p \mid a^{p} - a$$

Ésta es una prueba de primalidad

Los números primos

El pequeño teorema de Fermat nos da una prueba de primalidad:

p no divide a $a^p - a$, entonces p no puede ser primo.

Ejemplos: $6^4 - 6 = 1296 - 6 = 1290$ *no es divisible entre 4, por tanto, 4 no es primo.*

$2^{21} - 2 = 2'097{,}152 - 2 = 2{,}097{,}150$ *no es divisible entre 21, por tanto, 21 no es primo.*

Los números primos

Números primos grandes

Si observamos la lista de números primos, nos encontramos entre ellos con

3, 7, 31, 127, etc.

Todos estos números son de la forma:

$2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, $2^7 - 1$.

Los números primos

Esto no significa que, en general,

$2^n - 1$

sea primo.

Hasta la edad media se suponía que:

si n es primo, entonces $2^n - 1$ es primo.

Esto tampoco es cierto, aunque los ejemplos son para valores primos de n muy grandes.

Los números primos

El primo más grande que se conoce se descubrió el 25 de enero de 2013. Éste es de la forma anterior, a saber, se trata de

$$p = 2^{57\,885\,161} - 1,$$

Éste es un número con más de

17 millones de cifras.

Los números primos

Los anteriores primos conocidos de este tipo eran:

$2^{37\,156\,667} - 1$

$2^{43\,112\,609} - 1$,

Éste es un número con casi 13 millones de cifras.

Por supuesto, los exponentes, 37 156 667 y 43 112 609 son también números primos.

Los números primos

De hecho, tenemos los

números primos de Mersenne (Ca. 1600).

Están dados por la fórmula

$$P_m = 2^p - 1\,,$$

donde p es un número primo.

Los números primos

Si p es un número compuesto, es decir,

$$p = st,$$

entonces

$$2^p - 1 = (2^s - 1)(2^{s(t-1)} + 2^{s(t-2)} + \dots + 1)$$

por lo que

$$2^p - 1$$

es compuesto.

Los números primos

m	*p*	Número de cifras	descubrimiento
1	2	1	-
2	3	1	-
3	5	2	-
4	7	3	-
5	13	4	1456
6	17	6	1588
7	19	6	1588
8	31	10	1772
9	61	19	1883
10	89	27	1911
11	107	33	1914
12	127	39	1876

Los números primos

m	p	Número de cifras	descubrimiento
13	521	157	1952
14	607	183	1952
15	1279	386	1952
16	2203	664	1952
17	2281	687	1952
18	3217	969	1957
19	4253	1281	1961
20	4423	1332	1961
21	9689	2917	1963
22	9941	2993	1963
23	11213	3376	1963
24	19937	6002	1971

Los números primos

m	p	Número de cifras	descubrimiento
25	21701	6533	1978
26	23209	6987	1979
27	44497	13395	1979
28	86243	25962	1982
29	110503	33265	1988
30	132049	39751	1983
31	216091	65050	1985
32	756839	227832	1992
33	859433	258716	1994
34	1257787	378632	1996
35	1398269	420921	1996

Los números primos

m	*p*	Número de cifras	descubrimiento
36	2976221	895932	1997
37	3021377	909526	1998
38	6972593	2098960	1999
39	13466917	4053946	2001
40	20996011	6320430	2003
41	24036583	7235733	2004
42	25964951	7816230	2005
??	30402457	9152052	2005
??	32582657	9808358	2006
??	37156667	11185272	Sept. 2008
??	42643801	12837064	2009
??	43112609	12978189	Ago. 2008
??	57885161	17425170	Ene. 2013

Los números primos

La criba de Eratóstenes (250 aC)

1:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
2:	2	3	-	5	-	7	-	9	-	11	-	13	-	15	-	17	-	…
3:	2	3	-	5	-	7	-	-	-	11	-	13	-	-	-	17	-	…
5:	2	3	-	5	-	7	-	-	-	11	-	13	-	-	-	17	-	…

etcétera

Por ejemplo para ver los primos menores que 1000 hay que tachar los múltiplos de 2, 3, 5, 7, 11,…, 31.

Quedarán 168

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
97 98 99 100

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39

40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58

59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77

78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96

97 98 99 100

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
97 98 99 100

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
97 98 99 100

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
97 98 99 100

Los números primos

La criba de Eratóstenes en funciones

2 3 5 7 11 13 17

23 29 31

41 43 47 53

59 61 67 71 73

79 83 89

97

Los números primos

Una fórmula en *26 variables* $a, b, c, \ldots , x, y, z$

que proporciona números primos

$$
\begin{gathered}
(k+2)\{1-[wz+h+j-q]^2-[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2- \\
-[2n+p+q+z-e]^2-[16(k+1)3(k+2)(n+1)2+1-f2]^2- \\
-[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2-[(a^2-1)y^2+1-x^2]^2- \\
-[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2- \\
-[((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy^2)+1-(x+cu)^2]^2-[n+l+v-y]^2- \\
-[(a^2-1)l^2+1-m^2]^2-[ai+k+1-l-I]^2- \\
-[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m]^2- \\
-[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2- \\
-[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2\}.
\end{gathered}
$$

Los números primos

A primera vista podría pensarse que esta fórmula es contradictoria, toda vez que la fórmula es equivalente a

$$(k+2)\{1-M\},$$

que es un producto.

Mas no es el caso, pues siendo M una suma de cuadrados, es positivo o cero. Así, la fórmula es positiva si y sólo si $M=0$, y su valor entonces es $k+2$. Puesto en otros términos, M como función de k y otras variables es cero si y solamente si $k+2$ es un número primo.

Los números primos

Leonhard Euler (1740) propuso una fórmula

para generar números primos

$m^2 + m + 41$.

Si calculamos, obtenemos

$0^2 + 0 + 41 = 41$ $\quad$ $1^2 + 1 + 41 = 43$

$3^2 + 3 + 41 = 53$ $\quad$ $4^2 + 4 + 41 = 61$

$5^2 + 5 + 41 = 91$

Pero $91 = 7 \times 13$ no es primo.

Los números primos

La distribución de los números primos

$\pi(10) = 4$,	$\pi(50) = 15$,	$\pi(100) = 25$,	$\pi(1000) = 168$
40%	30%	25%	16.8%

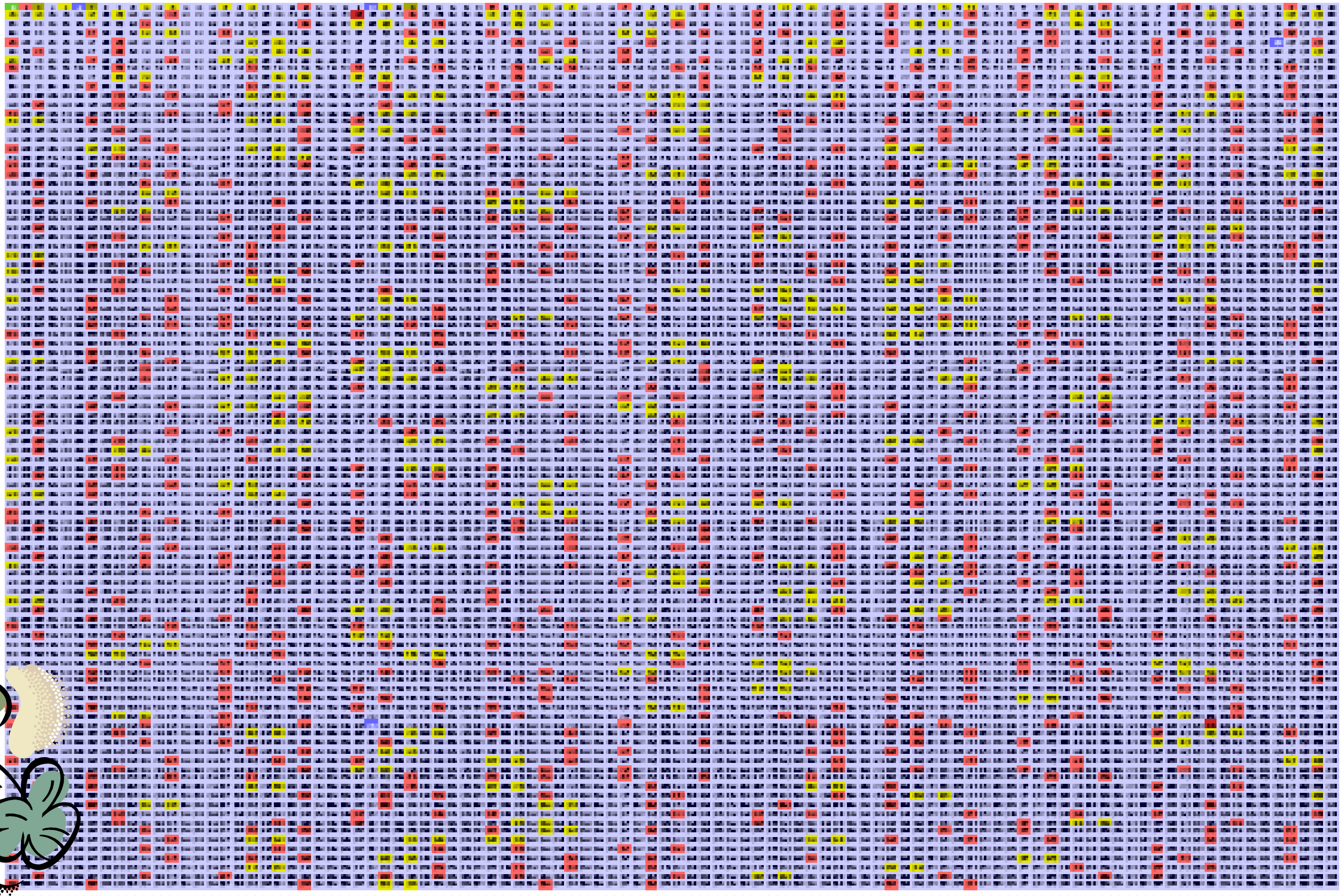
El número de primos menores que N:

$$\pi(N) \approx N/\log N$$

Gauss (1800)

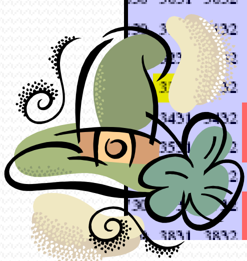
Los números primos

EL UNIVERSO DE LOS NÚMEROS



Los números primos

30	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863
30	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963
030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	106
130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	116
230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	126
330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	136
430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	146
530	1531	1532	1533	1534	1535	1536	1537	1538	1539	1540	1541	1542	1543	1544	1545	1546	1547	1548	1549	1550	1551	1552	1553	1554	1555	1556	1557	1558	1559	1560	1561	1562	156
630	1631	1632	1633	1634	1635	1636	1637	1638	1639	1640	1641	1642	1643	1644	1645	1646	1647	1648	1649	1650	1651	1652	1653	1654	1655	1656	1657	1658	1659	1660	1661	1662	166
730	1731	1732	1733	1734	1735	1736	1737	1738	1739	1740	1741	1742	1743	1744	1745	1746	1747	1748	1749	1750	1751	1752	1753	1754	1755	1756	1757	1758	1759	1760	1761	1762	176
830	1831	1832	1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840	1841	1842	1843	1844	1845	1846	1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	186
930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	196
030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059	2060	2061	2062	206
130	2131	2132	2133	2134	2135	2136	2137	2138	2139	2140	2141	2142	2143	2144	2145	2146	2147	2148	2149	2150	2151	2152	2153	2154	2155	2156	2157	2158	2159	2160	2161	2162	216
230	2231	2232	2233	2234	2235	2236	2237	2238	2239	2240	2241	2242	2243	2244	2245	2246	2247	2248	2249	2250	2251	2252	2253	2254	2255	2256	2257	2258	2259	2260	2261	2262	226
330	2331	2332	2333	2334	2335	2336	2337	2338	2339	2340	2341	2342	2343	2344	2345	2346	2347	2348	2349	2350	2351	2352	2353	2354	2355	2356	2357	2358	2359	2360	2361	2362	236
430	2431	2432	2433	2434	2435	2436	2437	2438	2439	2440	2441	2442	2443	2444	2445	2446	2447	2448	2449	2450	2451	2452	2453	2454	2455	2456	2457	2458	2459	2460	2461	2462	246
530	2531	2532	2533	2534	2535	2536	2537	2538	2539	2540	2541	2542	2543	2544	2545	2546	2547	2548	2549	2550	2551	2552	2553	2554	2555	2556	2557	2558	2559	2560	2561	2562	256
630	2631	2632	2633	2634	2635	2636	2637	2638	2639	2640	2641	2642	2643	2644	2645	2646	2647	2648	2649	2650	2651	2652	2653	2654	2655	2656	2657	2658	2659	2660	2661	2662	266
730	2731	2732	2733	2734	2735	2736	2737	2738	2739	2740	2741	2742	2743	2744	2745	2746	2747	2748	2749	2750	2751	2752	2753	2754	2755	2756	2757	2758	2759	2760	2761	2762	276
830	2831	2832	2833	2834	2835	2836	2837	2838	2839	2840	2841	2842	2843	2844	2845	2846	2847	2848	2849	2850	2851	2852	2853	2854	2855	2856	2857	2858	2859	2860	2861	2862	286
930	2931	2932	2933	2934	2935	2936	2937	2938	2939	2940	2941	2942	2943	2944	2945	2946	2947	2948	2949	2950	2951	2952	2953	2954	2955	2956	2957	2958	2959	2960	2961	2962	296
030	3031	3032	3033	3034	3035	3036	3037	3038	3039	3040	3041	3042	3043	3044	3045	3046	3047	3048	3049	3050	3051	3052	3053	3054	3055	3056	3057	3058	3059	3060	3061	3062	306
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3133	3134	3135	3136	3137	3138	3139	3140	3141	3142	3143	3144	3145	3146	3147	3148	3149	3150	3151	3152	3153	3154	3155	3156	3157	3158	3159	3160	3161	3162	316
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3233	3234	3235	3236	3237	3238	3239	3240	3241	3242	3243	3244	3245	3246	3247	3248	3249	3250	3251	3252	3253	3254	3255	3256	3257	3258	3259	3260	3261	3262	326
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3333	3334	3335	3336	3337	3338	3339	3340	3341	3342	3343	3344	3345	3346	3347	3348	3349	3350	3351	3352	3353	3354	3355	3356	3357	3358	3359	3360	3361	3362	336
[illegible]	3431	[illegible]	3433	3434	3435	3436	3437	3438	3439	3440	3441	3442	3443	3444	3445	3446	3447	3448	3449	3450	3451	3452	3453	3454	3455	3456	3457	3458	3459	3460	3461	3462	346
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3533	3534	3535	3536	3537	3538	3539	3540	3541	3542	3543	3544	3545	3546	3547	3548	3549	3550	3551	3552	3553	3554	3555	3556	3557	3558	3559	3560	3561	3562	356
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3633	3634	3635	3636	3637	3638	3639	3640	3641	3642	3643	3644	3645	3646	3647	3648	3649	3650	3651	3652	3653	3654	3655	3656	3657	3658	3659	3660	3661	3662	366
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3733	3734	3735	3736	3737	3738	3739	3740	3741	3742	3743	3744	3745	3746	3747	3748	3749	3750	3751	3752	3753	3754	3755	3756	3757	3758	3759	3760	3761	3762	376
[illegible]	3831	3832	3833	3834	3835	3836	3837	3838	3839	3840	3841	3842	3843	3844	3845	3846	3847	3848	3849	3850	3851	3852	3853	3854	3855	3856	3857	3858	3859	3860	3861	3862	386



Los números primos

Vamos a distribuir todos los números naturales en forma de una espiral, la llamada **espiral de Ulam**.
Comencemos colocando el 1:

1

Los números primos

1 —— 2

Los números primos

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d, dash] \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd}$$

Los números primos

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[d, dash] \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd}$$

Los números primos

5 —— 4 —— 3

1 —— 2

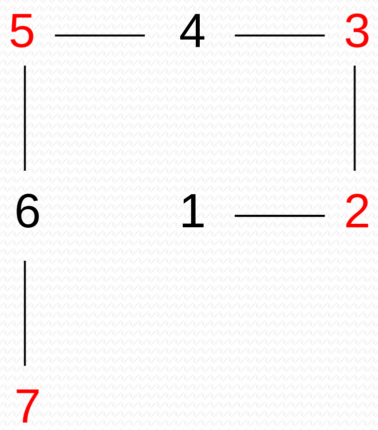
Los números primos

5 —— 4 —— 3

| |

6   1 —— 2

Los números primos



Los números primos

5	4	3	
6	1	2	11
7	8	9	10

Los números primos

			13
5	4	3	12
6	1	2	11
7	8	9	10

Los números primos

17	16	15	14	13
	5	4	3	12
	6	1	2	11
	7	8	9	10

Los números primos

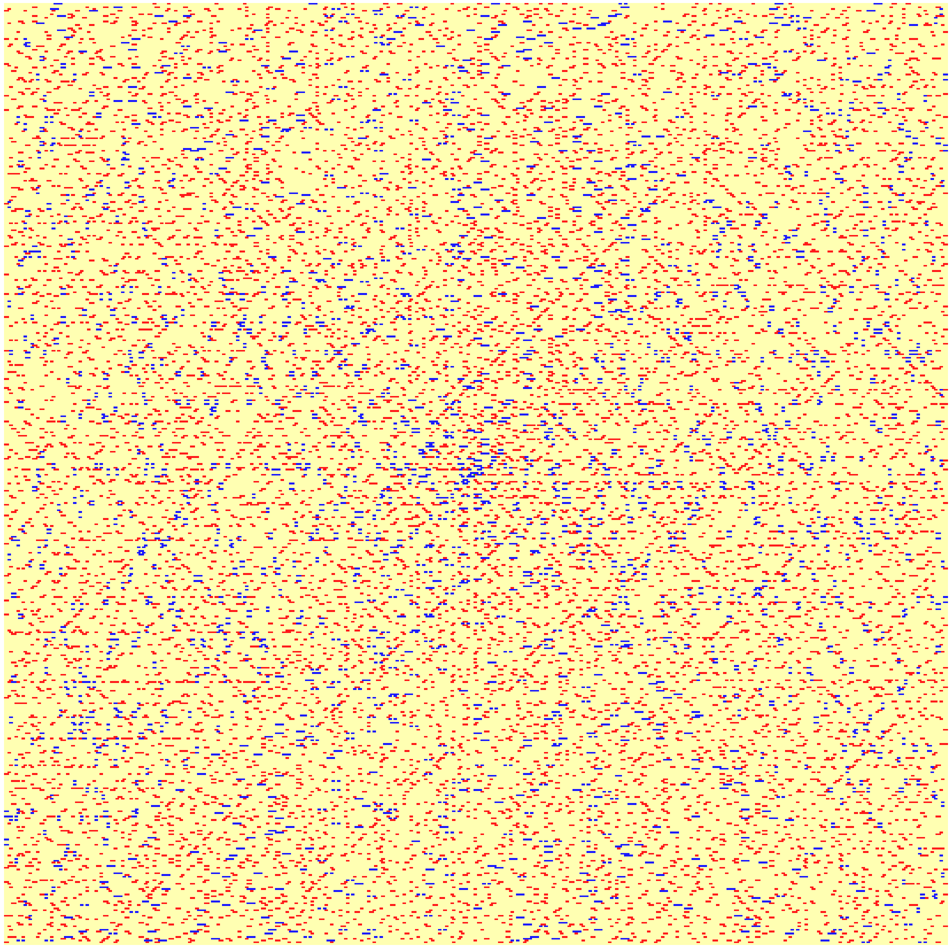
17	16	15	14	13	
18	5	4	3	12	
19	6	1	2	11	
20	7	8	9	10	
21	22	23	24	25	26

Los números primos

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49...

Espiral de Ulam

Los números primos



Los números primos están más presentes en unas diagonales que en otras.

Espiral de Ulam (1963)

Los números primos

Los primos gemelos

Observemos las siguientes parejas:

3, 5

5, 7

11, 13

17, 19

29, 31

41, 43

101, 103

107, 109

821, 823

--,--

$6n-1$, $6n+1$

$n=1$, o n debe terminar en

0, 2, 3, 5, 7 u 8

Los números primos

Primos gemelos: $(p,\ p+2)$

Conjetura

Se presume que hay una infinidad de primos gemelos.

La prueba parece estar muy lejana.

Los números primos

La comjetura de Goldbach

Veamos unos ejemplos:

$4 = 2 + 2,\ \ 6 = 3 + 3,\ \ 8 = 3 + 5,\ \ 10 = 5 + 5,$

$12 = 5 + 7,\ \ 14 = 7 + 7,$

$16 = 3 + 13,\ \ 18 = 5 + 13,\ \ 20 = 7 + 13, \ldots ,$

$46 = 3 + 43, \ldots$

$100 = 3 + 97, \ldots , 204 = 101 + 103,$ etcétera

Los números primos

Podemos observar que cada número par que nos venga a la mente es suma de dos números primos

Conjetura de Goldbach

Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.

Los números primos

La pequeña conjetura de Goldbach

Todo número mayor que 5 es suma de tres números primos.

Los números primos

La conjetura grande implica la pequeña:

Si $n > 5$ es par, tómese

$$n' = n - 2 > 3.$$

Entonces, por ser n' también par > 2,

$$n' = n - 2 = p + q,$$

por lo que

$$n = p + q + 2.$$

Los números primos

Si $n > 5$ es impar, tómese

$$n' = n - 3 > 2.$$

Entonces, n' resulta ser par > 2, por lo que

$$n' = n - 3 = p + q,$$

de donde

$$n = p + q + 3.$$

Los números primos

Hablaremos ahora de otra famosa conjetura.

Consideremos las potencias

2^3 y 3^2

y observemos que la primera vale 8, mientras que la segunda vale 9, es decir, son números consecutivos.

Podemos decir que $a = 2$, $b = 3$, $m = 3$ y $n = 2$ son solución de la ecuación

$$a^m - b^n = 1$$

Los números primos

Ya desde hace casi setecientos años se habían percatado de esta relación y **Levi ben Gershon*** (1288-1344), conocido como **Gersónides**, demostró que la ecuación

$$3^m - 2^n = \pm 1$$

tiene como única solución a $m = 2$ y $n = 3$, es decir, ninguna otra potencia de 2 difiere de ninguna otra potencia de 3 en 1.

*hijo de Gershon ben Solomon Catalan, nacido en Languedoc

Los números primos

Medio milenio después que Gersonides, en 1844, el matemático belga **Eugène Charles Catalan** (1814-1894) formuló la siguiente

Conjetura de Catalan

La única solución de la ecuación

$$a^m - b^n = 1$$

tal que a, b, m *y* n *sean enteros positivos, es* $a = 3$, $b = 2$, $m = 2$ *y* $n = 3$.

La prueba

Casi 160 años después de su formulación, y haciendo uso de la teoría de campos ciclotómicos y de módulos de Galois, el matemático rumano, **Preda Mihailescu** (1955 -) probó, en 2002 esta difícil conjetura, que durante más de siglo y medio había sido un desafío para muchos matemáticos de todo el mundo.

Los números primos

Volviendo a la **conjetura de Goldbach**, una posible prueba de ella está relacionada con otra famosa conjetura, conocida como la

Hipótesis de Riemann (1860)

que afirma:

> Los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen parte real ½.

Los números primos

Donde la función zeta de Riemann está dada por:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

en la que s es un número complejo

Los números primos

Éste es probablemente uno de los problemas más difíciles de las matemáticas. El **Instituto Clay** de los Estados Unidos, ha establecido un premio de **un millón de dólares** para quien pruebe alguno de una lista de siete **problemas del milenio.** Uno de ellos es precisamente

la hipótesis de Riemann.

Un pensamiento final

Recuerden bien:

Las matemáticas son el arte de la abstracción.

¡Muchas gracias!

FIN

Dr. Carlos Prieto

Investigador Titular

Instituto de Matemáticas, UNAM

http://www.matem.unam.mx/cprieto