Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 6/11/2019

A. Capella, O. Cabrera

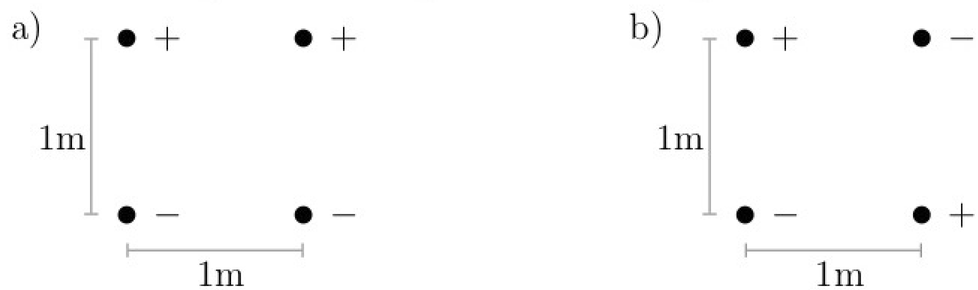
Tarea 6: Ecuación de Laplace y Poisson 1

**Instrucciones:**
**- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea**
**- Fecha de entrega: Miércoles 20 de noviembre de 2019**

1. (Polinomios armónicos y armónicos esféricos en $\mathbb{R}^3$) Calcule todos los polinomios armónicos de grado $\ell \leq 3$

2. Momentos cuadrupolares

   Considere las siguientes configuraciones de cargas unitarias

   Calcule los 4 primeros términso de la expansión multipolar (en 3 dimensiones). (Escribir el resultado en términos de matrices o alguna forma compacta).

3. **Problema armónico en 3D** Calcule la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega = (0,1)^3 \\ u(x,y,z) = g(x,y,z) & \partial\Omega \end{cases}$$

   where

$$g(x,y,z) = \begin{cases} -\frac{y^2+z^2}{2\pi} - \frac{y}{4\pi} & x = 0 \\ -\frac{y^2+z^2-2}{2\pi} - \frac{13y}{4\pi} & x = 1 \\ -\frac{z^2-2x^2}{2\pi} & y = 0 \\ -\frac{-2x^2+z^2+1}{2\pi} - \frac{3x}{\pi} - \frac{1}{4\pi} & y = 1 \\ -\frac{y^2-2x^2}{2\pi} - \frac{3xy}{\pi} - \frac{y}{4\pi} & z = 0 \\ -\frac{-2x^2+y^2+1}{2\pi} - \frac{3xy}{\pi} - \frac{y}{4\pi} & z = 1 \end{cases}$$

   Hint: encuentre la combinación lineal de polinomios tal que satisfaga las condiciones de frontera ( son solo 3 polinomios)

4. (Función de Green para un cuarto de plano $\mathbb{R}^2_{++}$)
   (a) Construya la función de Green $G(\cdot, x^{(0)})$ para $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2_+ := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ (el semi-plano superior).

(b) Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función holomorfa donde $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ y $u : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función harmónica. Demuestre que la composición $u \circ f$ es harmónica sobre $\Omega_1$.

(c) Escriba la función de Green $G$ para un cuarto de plano $R^2_{++} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$.

*Sugerencia:* Use el método de las imágenes y recuerde que en $\mathbb{R}^2$ la solución fundamental del Laplaciano es

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|.$$

5. (Función de Green para el problema de Neumann )
Considere el problema de Poisson con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = \rho & \text{en } \Omega \\ \\ \partial_\nu u = g & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

*a*) Demuestre que, para que el problema (1) tenga solución, $\rho$ y $g$ deben satisfacer la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega \rho(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(y) dS(y). \tag{2}$$

*b*) Sea $N(x,y) = \Phi(x-y) - v(x,y)$ la función de Green para (1). Encuentre que problema debe resolver $v(x,y)$ para que

$$u(x) - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u(y) dS(y) = \int_\Omega N(x,y)\rho(y) dy + \int_{\partial\Omega} N(x,y) g(y) dS(y)$$

sea la formula explícita de solución de (1).

*Sugerencia:* Recuerde la deducción de la fórmula solución (o representación) del problema de Dirichlet vista en clase.