Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 6/11/2019

A. Capella, O. Cabrera

Tarea 5: Ecuación de Laplace y Poisson 1

Instrucciones:
- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea
- Fecha de entrega: Lunes 13 de noviembre de 2019

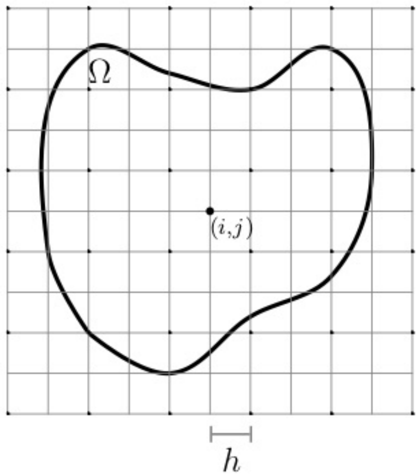
1. **Solución fundamental en $\mathbb{R}^2$.**
   La solución fundamental en $\mathbb{R}^2$ es
   $$\phi(x) := -\frac{1}{2\pi}\log(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$
   Demuestre que, si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ entonces,
   $$u(x) := (\phi \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y) f(y)\, dy$$
   es una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ y
   $$-\Delta u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

2. **Teorema de Liouville**
   a) Demuestre la siguiente desigualdad:
   Sea $u \in C^3(\Omega)$ una función armónica en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Entonces
   $$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{3}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u|$$
   para toda $B_R(x_0) \subset \Omega$ y $i = 1, 2, 3$.
   Sugerencia: Demuestre que bajo estas hipótesis $\partial_i u$ es armónica y use la propiedad del promedio.

   b) Demuestre el teorema de Liouville:
   Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in C^3(\mathbb{R}^3)$ una función armónica y acotada, entonces u es constante.

3. **Transformación de Kelvin**
   Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ abierto y u armónica en Ω. Sean
   $$\Omega^* := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tal que } \frac{x}{|x|^2} \in \Omega \right\}$$
   $$u^*(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$
   Demuestre que u^* es armónica en Ω^*.

4. **Principio del máximo fuerte discreto**



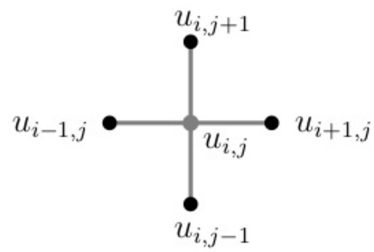
Sean

$\Omega_h = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tales que } \ (i,j)h \in \Omega\}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$u : \Omega_h \to \mathbb{R}$

Decimos que u es una función armónica discreta si satisface la propiedad del promedio, es decir:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)$$



Demuestre el principio del máximo fuerte para u, es decir:

Si $u_{i,j} = \max_{\Omega_h} u$ en el interior de Ω_h entonces $u_{i,j} = \textit{constante} \quad \forall (i,j) \in \Omega_h$.