Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 14/10/2019

A. Capella, O. Cabrera

Tarea 4: Ecuación del calor 2

Instrucciones:
- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea
- Fecha de entrega: Lunes 23 de octubre de 2019

1. (Fuente de contaminación nop instantanea) Un contaminante con concentración $u = u(x,t)$ (masa por unidad de longitud) se difunde de acuerdo con la ecuación de difusión, con coeficiente de difusión D a lo largo de un canal angosto (el eje x). En $x = 0$ entra una cantidad de contaminante $q(t)$ (masa por segundo por unidad de longitud), donde

$$q(t) = \begin{cases} Q, & 0 < t < T \\ 0, & T < t \end{cases}$$

Determine la concentración del contaminante en x para todo tiempo y su comportamiento asintótico para $t \to \infty$

2. (Problemas sobre los semi-ejes; el método de reflexión) Sea $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

   a) Encuentre la fórmula de solución para el problema

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

   Sugerencia: Extienda el dato inicila para $x < 0$ de forma impar y use la formula de solución para el problema de Cauchy en todo $\mathbb{R}$.

   b) Encuentre la fórmula de solución para el problema

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

   Sugerencia: Extienda el dato inicila para $x < 0$ de forma par y use la formula de solución para el problema de Cauchy en todo $\mathbb{R}$

3. Encuentre la solución al problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -1 & x \in (0,1) \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in (0,1) \quad t = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = \sin(\pi t) & t > 0. \end{cases}$$

¿Puede existir un punto $0 < x_0 < 1$ tal que $u(x_0, 1) = 1$?

4. Sea $u = u(x,t)$ una solución de la ecuación del calor, $u_t = u_{xx}$, en un dominio $D_T \subset Q_T := [0,L] \times [0,T]$, con $T > 0$, y tal que $D_T = Q_T \backslash (\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} \cup \overline{Q_3})$, donde Q_1, Q_2 y Q_3 son los rectángulos tal y como se muestra en la figura, y $\overline{Q_1}$ denota la cerradura de Q_1. Suponiendo que u toma su máximo valor M en un punto (x_1, t_1) del interior de D_T, ¿en donde más se tiene que $u(x,t) = M$? Explique su respuesta.