Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 4/9/2019

A. Capella, O. Cabrera

Tarea 3: Ecuación del calor 1

Instrucciones:
- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea
- Fecha de entrega: Lunes 7 de octubre de 2019

1. Considere el siguiente problema de Cauchy-Newmann

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Usando el método de separación de variables encuentre la solución y describa su comportamiento cuando $t \to \infty$.

2. Use el método de separación de variables para resolver

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = tx & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = 1 & 0 < x < L \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Sugerencia: escriba la solución como $u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) v_m(x)$ donde las v_m son las soluciones al problema de valores propios asociado al problema homogéneo.

3. En el cuadrado $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, encuentre $u(x,y,t)$ tal que sea solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0 & (x,y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = 1 & (x,y) \in \Omega, \quad t = 0 \\ u(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases}$$

Sugerencia: Use separción de variables dos veces $u(x,y,t) = v(x,y)z(t)$ y luego $v(x,y) = X(x)Y(y)$.

4. Sea $u(x,t)$ una solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Demuestre que la solución $u(x,t)$ es no negativa, y encuentre dos números positivos α y β tales que

$$u(x,t) \leq w(x,t) = \alpha x(1-x)e^{-\beta t}.$$

Demuestre que $u(x,t) \to 0$ uniformemente en $[0,1]$ cuando $t \to +\infty$.

Sugerencia: Use el principio del máximo visto en clase.

5. Sea u solución de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 2te^{1-t}, u(1,t) = 1 - cos(\pi t) & t > 0. \end{cases}$$

que es continua en $Q_T = (0,1) \times (0, \infty)$

a) Demuestre que u es no-negativa

b) Determine una cota superior para $u(1/2, 1/2)$ y para $u(1/2, 3)$.

6. Consider el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

a) Determine la solución estacionaria $u^s = u^s(x)$ que satisface las condiciones de frontera

b) Demuestre que $u(x,t) \leq u^s(x)$ para todo $t > 0$

c) Encuentre $\beta > 0$ tal que $u(x,t) \leq (1 - e^{-\beta t})u^s(x)$

d) Deduzca que $u(x,t)$ tiende uniformemente a $u^s(x)$ cuando $t \to \infty$

e) Resuelva el problema por separación de variables para verificar los resultados anteriores.