Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 4/9/2019

A. Capella, O. Cabrera

Tarea 2: Leyes de conservación

Instrucciones:
- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea
- Fecha de entrega: Viernes 13 de septiembre de 2019

1. Considere el problema de la luz verde visto en clase con la condición inicial

$$g(x) = \begin{cases} \rho_m & \text{en } x < 0 \\ 0 & \text{en } 0 < x \end{cases}$$

y calcule la densidad de coches para todo $t > 0$. Después, encuentre el tiempo que un a un coche que inicialmente (en $t = 0$) esta en la posición $x_0 = -v_m t_0$ le toma llegar al semáforo.

2. Consider el modelo de tráfico con la condición inicial

$$g(x) = \begin{cases} a\rho_m & \text{en } x < 0 \\ \rho_m/2 & \text{en } 0 < x \end{cases}$$

Describa las soluciones con respecto al parámetro $a \in [0, 1]$ las lineas características del sistema, las curvas de shocks y encuentre la solución en el semiplano (x, t) con $t > 0$. Interprete los resultados.

3. Estudie los siguientes problemas de la ecuación de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{en } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{cases}$$

donde los datos iniciales son

$$\text{a)} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } x < 0 \\ 1 & \text{en } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{en } 1 < x \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 1 & \text{en } x < 0 \\ 2 & \text{en } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en } 1 < x \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} 1 & \text{en } x < 0 \\ 1 - x & \text{en } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en } 1 < x \end{cases}$$

4. Consider la ley de conservación

$$u_t + u^3 u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } x < 0 \\ 1 & \text{en } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en } 1 < x \end{cases}$$

Calcule las curvas caracteristicas y describa con detalles los shocks y ondas de rarefracción que aparecen.

5. Demuestre que para $\alpha > 1$ la función

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} -1 & \text{en } 2x < (1-\alpha)t \\ -\alpha & \text{en } (1-\alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha & \text{en } 0 < 2x < (\alpha-1)t \\ 1 & \text{en } (\alpha-1)t < 2x \end{cases}$$

es una solución generalizada de

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{en } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases} & \end{cases}$$

¿Es también una solución de entropía?