Ecuaciones diferenciales parciales (Licenciatura) Fecha: 23/8/2019

A. Capella, O. Cabrera

Tarea 1: Ecuaciones de 1er orden

**Instrucciones:**
**- Unicamente se deberán entregar los ejercicios marcados con (∗)**
**- La presentación limpia y ordenada puntúa el 10 % de la calificación total de la tarea**
**- Fecha de entrega: Viernes 6 de septiembre de 2019**

1. (∗) Encuentre la solución al siguientes problemas de la ecuación de transporte. Haga un dibujo de las lineas característcas y la solución

$$\text{a)}\begin{cases} u_t + 3u_x = 0 & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \exp(-x^2) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} u_t - 8u_x = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin(x^2) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Demuestre la existencia de soluciones al los siguientes problemas de Cauchy y calcule la solución. Haga un dibujo de la linea de datos y las curvas características.

$$\text{a)}(*)\begin{cases} xu_x + u_y = y & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = x^2 & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} u_x - 2u_y = u & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = y & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{c)}(*)\begin{cases} u_x + 3u^2u_y = 1 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} z_x + z_y = z & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \cos(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{d)}(*)\begin{cases} u_x - xu_y - u_z = u & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ u(x,y,1) = x + y & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

3. Escriba las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$\text{a)}(*)\begin{cases} u_x - \sqrt{u}u_y = 0 & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = 1 & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} \frac{1}{y}u_x + u_y = u^2 & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ u(x,1) = 1 & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Detemine si el teorema de existencia y unicidad es aplicable en estos casos

4. Encuentre la solución $z = z(x,y)$ al problema

$$yz_x - xz_y = 2xyz \quad \text{con } z = s^2 \text{sobre } \Gamma = \{(s,s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}$$

5. (∗) (Condición de compatibilidad) Considere el problemas de Cauchy

$$a(x,y)u_x - u_y = -u$$

en la región $D = \{(x,y) \ : \ y > x^2\}$ y con la condición inicial

$$u(x,x^2) = g(x)$$

a) Examine las condiciones sobre $a$ para que el problema tenga solución $C^1$
b) Estudie el caso $a(x,y) = y/2$ y $g(x) = \exp(-cx^2)$cuando se varia el parametro $c$ en $\mathbb{R}$