4. Aproximación de soluciones en todo el espacio: el desarrollo multipolar

En la Proposición 4 se demuestra que para una densidad de carga $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ la solución al problema de Poisson (o el potencial electroestático),

$$-\Delta u(x) = \rho(x)$$

esta dado de forma “explícita”por la integral

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x-y)\rho(y)dy, \tag{16}$$

donde Φ es el potencial Newtoniano y la función u satisface

$$-\Delta u(x) = 0$$

para toda $x \in \mathbb{R}^3$ que fuera del soporte de ρ. FIGURA

Por lo tanto el problema se reduce a calcular explicitamente la integral (16). Sin embargo esto solo es posible en pocos casos y por lo tanto buscaremos alguna forma de aproximar la integral (16), al menos lejos del soporte de ρ, donde sabemos que la u es una función armónica.

A la siguiente expansión se le conoce como el desarrollo multipolar.

Proposición 21. *Sea $\rho \in C_0(\mathbb{R}^3)$ tal que el soporte de ρ este contenido en $B_R(0)$ y defina*

$$u(x) = \Phi \star \rho(x).$$

Entonces, existe una constante universal $C > 1$ tal que

$$u(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \mathscr{M}_\alpha D^\alpha \Phi(x)$$

uniformemente en $|x| > CR$ y donde

$$\mathscr{M}_\alpha := \int_{\mathbb{R}^3} y^\alpha \rho(y)\, dy.$$

Observación 22. Observemos que:

(a) A las constantes $\mathscr{M}_\alpha$ las llamamos los momentos multipolares de la distribución ρ. En particular para los casos $\alpha = (0,0,0)$ y $\alpha = (1,1,1)$ definimos

$$Q := \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) dy, \quad \text{y} \quad P := \int_{\mathbb{R}^3} y\rho(y) dy$$

que corresponden al momento monopolar y dipolar, respectivamente.

(b) Las derivadas $D^\alpha \Phi(x)$ que aparecen en la expansión multipolar, se les conoce como los multipolos.

Corolario 23. *Sea $\rho \in C_0(\mathbb{R}^3)$ tal que el soporte de ρ este contenido en $B_R(0)$, u definida como en la Proposición 21 y Q y P como el la observación anterior. Entonces*

(a) Si $Q \neq 0$ existe C independiente de ρ tal que

$$\left| u(x) - Q\Phi\left(x \frac{P}{Q}\right) \right| < \frac{C}{|x|^2} \quad \text{para } |x| \geq 2R.$$

(b) Si $Q = 0$ entonces existe C independiente de ρ tal que

$$|u(x) - P \cdot \nabla\Phi(x)| < \frac{C}{|x|^3} \quad \text{para } |x| \geq 2R.$$

Figura

Para demostrar la Proposición 21 necesitaremos varios resultados previos. En particular el siguiente lema establece una propiedad de invariancia de las funciones armónicas bajo una transformación de Moebious general.

FIGURA

Lema 24. *Sea $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ abierto y u una función armónica en Ω. Defina la inversión de Ω como*

$$\Omega^* := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ \textit{tal que} \ \frac{x}{|x|^2} \in \Omega \right\}$$

y la transformada de Kelvin de u como

$$u^*(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

Entonces, u^* es armónica en Ω^*.

Demostración. Ver ejercicio 6 □

Proposición 25. *Para cada multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ sea*

$$p_\alpha(x) = |x|^{2|\alpha|+1} D^\alpha \Phi(x) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Entonces:

(a) *p_α es un polinómio.*

(b) *p_α es homogéneo de grado $|\alpha|$.*

(c) *p_α es una función armónica en todo $\mathbb{R}^3$.*

(d) *Si escribimos*

$$p_\alpha(x) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} C_{\alpha\beta} x^\beta$$

entonces

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} |C_{\alpha\beta}| \leq \frac{5^{|\alpha|}(|\alpha|+1)!}{4\pi}.$$

Observación 26. Dado que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, cualquier derivada del potencial Newtoniano $D^\alpha \Phi$ una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, y por lo tanto solución de la ecuación

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

La Proposición 25 es interesante ya que nos permite construir de forma explícita una familia infinita de soluciones, que al ser polinomios son de naturaleza distinta a $D^\alpha \Phi$ y están definidas en todo $\mathbb{R}^3$.

Demostración de Proposición 25. 1. Comenzaremos demostrando (a), (b) y (d), por inducción sobre $k = |\alpha|$.
Hipótesis inductiva ($|\alpha| = k = 0$). En este caso

$$p_0(x) = |x|\Phi(x) = \frac{1}{4\pi}$$

Claramente p_0 es un polinomio homogéneo de grado 0 y la estimación de (d) se satisface.
Paso inductivo ($|\alpha| = k \Rightarrow |\alpha| = k+1$). Asumimos que (a), (b) y (d) se satisfacen para $|\alpha| = k$. Sea $i \in \{1,2,3\}$ y consideremos el multi-indice $\alpha + e_i$ de orden $k+1$.

Ahora, derivamos el polinomio $p_\alpha(x)$ conrespecto a x_1 para obtener

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}(x) = (2|\alpha|+1)|x|^{2|\alpha|}\frac{x_i}{|x|}D^\alpha\Phi(x) + |x|^{2|\alpha|+1}D^{\alpha+e_i}\Phi(x).$$

Multiplicando esta última expresión tenemos

$$|x|^2\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}(x) = (2|\alpha|+1)x_i\underbrace{|x|^{2|\alpha|+1}D^\alpha\Phi(x)}_{=p_\alpha(x)} + \underbrace{|x|^{2|\alpha+e_i|+1}D^{\alpha+e_i}\Phi(x)}_{=p_{\alpha+e_i}(x)}.$$

Reorganizando los términos en la última ecuación obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia,

$$p_{\alpha+e_i}(x) = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}(x) - (2|\alpha|+1)x|^{2|\alpha|+1}x_i p_\alpha(x). \tag{17}$$

Ahora por hipótesis el $p_\alpha(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $|\alpha|$ y se puede escribir como

$$p_\alpha(x) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} C_{\alpha\beta}x^\beta$$

Sustituyendo esta expansión en (17) obtenemos

$$\begin{aligned} p_{\alpha+e_i}(x) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} C_{\alpha\beta}\beta_i \left(x^{\beta-e_i+2e_1} + x^{\beta-e_i+2e_2} + x^{\beta-e_i+2e_3} \right) \\ - (2|\alpha|+1) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} C_{\alpha\beta} x^{\beta+e_i}. \end{aligned} \tag{18}$$

Si notamos ahora que

$$|\beta - e_i + 2e_1| = |\beta - e_i + 2e_1| = |\beta - e_i + 2e_1| = |beta + e_i| = k+1.$$

concluimos que $P_{\alpha+e_i}(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $k+1$, lo que demuestra (a) y (b) de la proposición.

Para demostrar (d) notamos de que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha+e_i|}} \left| C_{\alpha+e_i\beta} \right| \overset{(18)}{\leq} & \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha+e_i|}} \left[3\beta_i |C_{\alpha\beta}| + (2|\alpha|+1)|C_{\alpha\beta}| \right] \\ \leq & \underbrace{(5|\alpha|+1)}_{\leq 5(|\alpha|+1)} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha|}} |C_{\alpha\beta}| \\ \leq & 5(|\alpha|+1) \frac{1}{4\pi} 5^{|\alpha|} (|\alpha|+1)! \\ \leq & \frac{1}{4\pi} 5^{|\alpha+e_i|} (|\alpha+e_i|+1)!. \end{aligned}$$

que es (d), como se queria demostrar.

2. Ahora vamos a demostrar (c), es decir que $p_\alpha(x)$ es un polinomio armónico.

En efecto, como $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, entonces $D^\alpha \Phi$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ahora por el Lema 24, la transformada de Kelvin,

$$(D^\alpha \Phi)^*(x) = \frac{1}{|x|} (D^\alpha \Phi) \left(\frac{x}{|x|^2} \right)$$

es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Notemos ahora que por el apartado 1. de esta demostración, $p_\alpha(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $|\alpha|$ y

$$D^\alpha \Phi(x) = \frac{1}{|x|^{2|\alpha|+1}} p_\alpha(x),$$

y por lo tanto $D^\alpha\Phi(x)$ es una función homogénea de grado

$$|\alpha| - (2|\alpha|+1) = -|\alpha| - 1.$$

Entonces,

$$\frac{1}{|x|}(D^\alpha\Phi)\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{-|\alpha|-1}}_{=|x|^{2|\alpha|+1}} D^\alpha\Phi(x)}_{=p_\alpha(x)}.$$

Por lo tanto $p_\alpha(x)$ es armónico en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, y es un polinomio. Entonces, $p_\alpha(x)$ es armónico en $\mathbb{R}^3$ como se queria demostrar.

□

Observación 27. De la demostración de la Proposición 25 cabe resaltar tres aspectos:

(a) Los polinomios $p_\alpha(x)$ son las transformaciones de Kelvin de las derivadas del potencial Newtoniano $\Phi(x)$. Aun mas, las $D^\alpha\Phi(x)$ son funciones singulares en el origen, que tienden a cero en infinito. Geométricamente, la transformación de Kelvin envia la singularidad al infinito y trae el valor regular cero al origen.

(b) La formula

$$p_\alpha(x) = |x|^{2|\alpha|+1}D^\alpha\Phi(x)$$

que se usa para definir a los polinomios $p_\alpha(x)$ es una función generadora, típica de las familias de polinomios . Refrencia

(c) Otra característica típica de las familias de polinomios del tipo de $p_\alpha(x)$, son las formulas de recurrencia del típo

$$p_{\alpha+e_i}(x) = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}(x) - (2|\alpha|+1)x|^{2|\alpha|+1}x_i p_\alpha(x). \qquad (19)$$

Es claro entonces que, dado (19) basta con conocer $p_0(x) = (4\pi)^{-1}$ para generar la familia completa de las $p_\alpha(x)$.

Lema 28. *Existe una constante universal $C > 16$ tal que*

$$|x|\Phi(x-y) = \lim_{N\to\infty}\left[|x|\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\ |\alpha|=k}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x)y^{\alpha}\right] \tag{20}$$

uniformemente para $|x| > C|y|$.

Demostración. 1. Tenemos que

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\ |\alpha|=k}}\frac{k!}{\alpha!} = 3^k.$$

En efecto, por el teorema del binomio tenemos

$$\begin{aligned}
3^k = (1+2)^k &= \sum_{\alpha_1=0}^{k}\binom{k}{\alpha_1}1^{\alpha_1}2^{k-\alpha_1}\\
&= \sum_{\alpha_1=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!}\underbrace{2^{k-\alpha_1}}_{=(1+1)^{k-\alpha_1}}\\
&= \sum_{\alpha_1=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!}\sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}1^{\alpha_2}1^{k-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= \sum_{\alpha_1=0}^{k}\sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!}\\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k}}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!},
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.
2. Para todas $k \in \mathbb{N}$, se satisface

$$\left||x|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\ |\alpha|=k}}\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x)y^{\alpha}\right| \le \frac{k+1}{4\pi}\left(\frac{15|y|}{|x|}\right)^k \tag{21}$$

En efecto, por la Proposición 25 notemos que

$$\begin{aligned}
|D^\alpha \Phi(x)| &= \left| |x|^{-(2|\alpha|+1)} p_\alpha(x) \right| \\
&\leq |x|^{-2|\alpha|-1} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha| = k}} \left| C_{\alpha\beta} x^\beta \right| \\
&\leq |x|^{-2|\alpha|-1} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = |\alpha| = k}} \left| C_{\alpha\beta} \right| \underbrace{\left| x^\beta \right|}_{\leq |x|^{|\alpha|}} \\
&\leq |x|^{-k-1} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\beta| = k}} \left| C_{\alpha\beta} \right|.
\end{aligned} \tag{22}$$

Donde en la tercera linea usamos que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq |x|^k$. Ahora notemos que por la Proposición 25 parte (d) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| |x| \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \Phi(x) y^\alpha \right| &\leq \frac{|x|}{\alpha!} |D^\alpha \Phi(x)| \, |y^\alpha| \\
&\overset{(22)}{\leq} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \left(\frac{5|y|}{|x|} \right)^k \frac{1}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, re-ordenando los factores y sumando sobre α obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| |x| \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \Phi(x) y^\alpha \right| &\leq \frac{(k+1)}{4\pi} \left(\frac{5|y|}{|x|} \right)^k \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} \\
&\overset{(20)}{\leq} \frac{k+1}{4\pi} \left(\frac{15|y|}{|x|} \right)^k,
\end{aligned}$$

es decir (21).
3. Tenemos que la cota

$$\left| |x| \left[\Phi(x-y) - \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D^\alpha \Phi(x) y^\alpha \right] \right| \leq \frac{N+2}{4\pi} \left(\frac{15|y|}{|x|-|y|} \right)^{N+1} \left(\frac{|x|}{|x|-|y|} \right) \tag{23}$$

se satisface.

En efecto, recordemos la fórmula del residuo en una dimensión

$$f(1)-\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)=\frac{1}{N!}\int_0^1 (a-t)^N f^{(n+1)}(t)\;dt. \tag{24}$$

Sea $f(t)=\Phi(x-ty)$, entonces por la regla de la cadena las derivadas de f estarán dadas por

$$f^{(k)}(t)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}}(-1)^{|\alpha|}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x-yt)y^{\alpha},$$

y de (24) obtenemos

$$\begin{aligned}\Bigg||x|\Big[\Phi(x-y)-&\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x)y^{\alpha}\Big]\Bigg|\\
&\le\frac{|x|}{N!}\int_0^1(1-t)^N\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}}(-1)^{|\alpha|+1}\frac{(N+1)!}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x-ty)y^{\alpha}dt\Bigg|\\
&\le\frac{(N+1)!}{N!}\int_0^1(1-t)^N\Bigg||x|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\phi(x-ty)y^{\alpha}\Bigg|dt\\
&\overset{(21)}{\le}\frac{(N+1)!}{N!}\int_0^1(1-t)^N\frac{N+2}{4\pi}\left(\frac{15|y|}{|x-ty|}\right)^{N+1}\frac{|x|}{|x-ty|}dt.\end{aligned}$$

Notando ahora que por hipótesis $|x-ty|>|x|-t|y|>|x|-|y|$ para $t\in[0,1]$, de la última ecuación concluimos que

$$\begin{aligned}\Bigg||x|\Big[\Phi(x-y)-&\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\Phi(x)y^{\alpha}\Big]\Bigg|\\
&\le\frac{N+2}{4\pi}\left(\frac{15|y|}{|x|-|y|}\right)^{N+1}\frac{|x|}{|x|-|y|}\underbrace{(N+1)\int_0^1(1-t)^N dt}_{=1},\end{aligned}$$

que es (23).

4. Conclusión. Notemos primero que del apartado 2. se sigue la convergencia de la serie para $C > 15$, ya que en este caso

$$\frac{|y|}{|x|} \leq \frac{1}{15}.$$

Por el apartado 3. de la demostración se sigue la convergencia uniforme para $C > 16$. En efecto, nótese que como

$$c|y| \leq |x| \quad \Leftrightarrow \quad |x| - |y| \geq \left(\frac{C-1}{C}\right)|x|$$

tenemos que

$$\frac{15|y|}{|x|-|y|} \leq \frac{15C|y|}{(C-1)|x|} \leq \frac{15|x|}{(C-1)|x|} \leq 1 \tag{25}$$

donde la última igualdad será cierta siempre que $C > 16$. Finalmente, nótese que

$$\frac{|x|}{|x|-|y|} \leq \frac{C}{C-1} < \infty. \tag{26}$$

Finalmente, usando (25) y (26) en (23) se sigue la convergencia uniforme (20), que es lo quer se queria demostrar. □

Finalmente podemos demostrar la Proposición 21.

Demostración de la Proposición 21. Sea C la constante del Lema 28, entonces

$$|x|\Phi(x-y)\rho(y) = \lim_{N\to\infty} |x| \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D^\alpha \Phi(x) y^\alpha \rho(y) \tag{27}$$

uniformemente en $|x| \geq CR$ para $R \geq |y|$.

Integrando (27) con respecto a y en la bola $B_R(0)$, e intercambiando el límite con la integral se obtiene

$$\int_{B_R(0)} |x|\Phi(x-y)\rho(y)dy = \lim_{N\to\infty} |x| \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \\ |\alpha| = k}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D^\alpha \Phi(x) \underbrace{\int_{B_R(0)} y^\alpha \rho(y)dy}_{= \mathscr{M}^\alpha}$$

uniformemente en $|x| > CR$. Finalmente, dividiendo por $|x|$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|x|}\int_{\mathbb{R}^3} |x|\Phi(x-y)\rho(y)dy \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^3\\|\alpha|=k}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathscr{M}_\alpha D^\alpha\Phi(x)\end{aligned}$$

donde la convergencia se mantiene uniforme ya que

$$\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{CR},$$

con lo que se demuestra el resultado. □

Incluir dos ejemplos: a) un aproximación lejana de u, para 4 esferas sobre el eje z con $\rho = \pm cte$ en cada, b) una solución a un problema en un cubo, donde la condición de frontera es simplemente una combinación lineal de ciertos polinomios p_αs

5. El operador de Laplace-Beltrami en la esfera y los armónicos esféricos

Motivados por la expansión multipolar de la Sección 4 introducimos la siguiente definición:

Definición 29. Decimos que una función $u : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es una función armónica esférica de grado ℓ, siempre que exista $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$u = p \quad \text{sobre } \mathbb{S}^{n-1},$$

donde

(a) p es un polinomio en R^n.

(b) p es homogéneo de grado ℓ.

(c) p es armónico.

Observación 30. Notemos que

(a) Si u y p son como en la Definición 29 entonces

$$p(x) = |x|^{\ell} u\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

(b) De la Proposición 25 se sigue que $\mathbb{S}^2 \ni x \mapsto D^{\alpha}\Phi(x)$ es una función armónica de grado $|\alpha|$.

Coordenadas esféricas

Vamos a considerar el sistema de coordenadas esféricas y radiales dado por

$$r = |x| \in (0, \infty) \quad \text{y} \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

E n este caso claramente tenemos que

$$x = r\,\theta.$$

La interpretación geométrica de la coordenada radial es clara, ya que mide la distancia al origen de coordenadas. La coordenada angular θ describe los llamados cosenos directores. FIGURA

Ahora definiremos los operadores diferenciales que corresponden a este sistema de coordenadas esférico.

Definición 31. (a) Sobre $\mathbb{R}^n$ definimos los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x_1}{r}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{r}\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla$$

donde $x/|x|$ representa el vector normal unitario exterior a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ definimos a las derivadas angulares, es decir tangentes a la coordenada r, como

$$L_{ij} := x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

También definimos la suma de los cuadrados de las derivadas angulares L_{ij}

$$L^2 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2.$$

(b) Sea $u : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$. El operador de Laplace-Beltrami sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ se define como

$$Bu := L^2 \left(\left\{ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\} \right) \Bigg|_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Como se ha visto la homogeneidad de las funciones es una propiedad importante, en particular notemos que la función

$$x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

es homogénea de grado cero. Esta es característica es inherente a una función definida únicamente sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Es de esperar que los operadores diferenciales correspondiente a las variables angulares también sean homogéneos de grado cero. En efecto, es inmediato que

$$\begin{aligned} L_{ij} \left(\left\{ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\} \right) \Bigg|_{\mathbb{S}^{n-1}}&, \\ L_{ij}^2 \left(\left\{ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\} \right) \Bigg|_{\mathbb{S}^{n-1}}& \quad \text{y} \\ L^2 \left(\left\{ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\} \right) \Bigg|_{\mathbb{S}^{n-1}}&, \end{aligned}$$

son operadores homogéneos de grado cero.

Lema 32. *Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Son equivalentes:*

(a) $r\dfrac{\partial}{\partial r}u = pu$ *con* $p \in \mathbb{R}$.

(b) La función u es homogénea de grado p.

De el Lema 32 tenemos el siguiente:

Corolario 33. *Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Son equivalentes:*

(a) $\dfrac{\partial}{\partial r}u = 0$

(b) Existe $w : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$u(x) = w\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Demostración del Lema 32. Primero calculamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{1}{\lambda^p}u(\lambda x)\right] &= -p\frac{1}{\lambda^{p+1}}u(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^p}\underbrace{x\cdot\nabla u(\lambda x)}_{=r\frac{\partial}{\partial r}(\lambda x)} \\ &= \frac{1}{\lambda^{p+1}}\left[-pu + \lambda r\frac{\partial}{\partial r}u\right](\lambda x)\end{aligned} \tag{28}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\text{(b)} &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^p}u(\lambda x) = u(x) \text{ para toda } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{1}{\lambda^p}u(\lambda x)\right] = 0 \text{ para toda } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ &\overset{(28)}{\Leftrightarrow} \left[-pu + \lambda r\frac{\partial}{\partial r}u\right](\lambda x) \text{ para toda } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ &\overset{\lambda=1}{\Leftrightarrow} \text{(a).}\end{aligned}$$

□

Lema 34. *Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Son equivalentes:*

(a) $L_{ij}u = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(b) u es radialmente simétrica, es decir,

$$u(Qx) = u(x) \quad \textit{para todo } Q \in SO(n).$$

(c) Existe $\eta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = \eta(|x|) \ \textit{ en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Demostración. La implicación (b) $\Rightarrow$ (c) es inmediata.

Ahora demostraremos (c) $\Rightarrow$ (a). En efecto,

$$\begin{aligned} L_{ij}u(x) = &\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \eta(|x|) \\ =& x_i \eta'(|x|) \frac{x_j}{|x|} - x_j \eta'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \\ =& 0. \end{aligned}$$

Finalmente demostraremos (a) $\Rightarrow$ (b). Para esto notemos primero que dado $Q_1 \in SO(n)$, existe una matriz anti-simétrica A de tamaño $n \times n$, tal que la solución del problema de valores iniciales

$$\frac{d}{dt} Q(t) = A\, Q(t) \quad \text{con} \quad Q(0) = I_{n\times n}, \tag{29}$$

satisface $Q(1) = Q_1$.

Por lo tanto bastara con demostrar que

$$\frac{d}{dt} \left[u(Q(t)x) \right] = 0. \tag{30}$$

En efecto, asumiendo (29) por el momento tenemos que

$$u(x) = u(Q(0)x) = u(Q(1)x) = u(Q_1 x),$$

lo cual implica (b).

Ahora demostraremos (30).

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[u(Q(t)x)\right] =& \nabla u(Q(t)x)\cdot \underbrace{\left[\frac{d}{dt}Q(t)x\right]}_{\overset{(29)}{=} AQ(t)x} \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(Q(t)x)A_{ji}(Q(t)x)_i \\
=& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(Q(t)x)A_{ji}(Q(t)x)_i - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(Q(t)x)A_{ij}(Q(t)x)_i}_{=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(Q(t)x)A_{ji}(Q(t)x)_j} \\
=& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ji} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(Q(t)x)(Q(t)x)_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}(Q(t)x)(Q(t)x)_j\right)}_{=L_{ij}(u(Q(t)x))} \\
& \qquad\qquad = 0
\end{aligned}
$$

lo cual implica (30), y termina la demostración. □

En la siguiente proposición escribiremos al operador Laplaciano en términos de las coordenadas esféricas (r,θ).

Proposición 35. *En términos de los operadores diferenciales de la Definición 31 tenemos que*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}L^2$$

De esta proposición tenemos el siguiente corolario que implica la separación de variables en coordenadas esféricas.

Corolario 36. *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ de la forma*

$$u(x) = \eta(|x|)w\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

entonces

$$\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)(|x|)w\left(\frac{x}{|x|}\right) + \frac{\eta(|x|)}{r^2}(Bw)\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Demostración. Ver ejercicio (8) □

Demostración de la Porposición (35). Primero notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(ru) =& \frac{x}{|x|}\cdot\nabla(ru)\\ =& \frac{x}{|x|}\cdot\left(\frac{x}{|x|}u+|x|\nabla u\right)\\ =& u+x\cdot\nabla u.\end{aligned}$$

Tomando $u=1$ y reorganizando términos en el cálculo anterior deducimos que

$$r\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}r-1 \tag{31}$$

como operador. Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}x_j=x_j\frac{\partial}{\partial x_i}+\delta_{ij}. \tag{32}$$

Ahora calculamos,

$$\begin{aligned}
r\ \underbrace{r\frac{\partial}{\partial r}}_{\overset{(31)}{=}\frac{\partial}{\partial r}r-1}\ \frac{\partial}{\partial r}+(n-1)r\frac{\partial}{\partial r}+L^2 & \\
=&r\left(\frac{\partial}{\partial r}r-1\right)\frac{\partial}{\partial r}+(n-1)r\frac{\partial}{\partial r}+L^2\\
=&\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+(n-2)r\frac{\partial}{\partial r}+L^2\\
=&\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2\\
=&\sum_{ij=1}^{n}x_i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}x_j}_{\overset{(32)}{=}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}+\delta_{ij}}\frac{\partial}{\partial x_j}+(n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{ij=1}^{n}x_i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}x_i}_{\overset{(32)}{=}x_i\frac{\partial}{\partial x_j}+\delta_{ij}}\frac{\partial}{\partial x_j}-x_i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}x_j}_{\overset{(32)}{=}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\\
=&\sum_{ij=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+(n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{ij=1}^{n}x_i^2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2\\
&+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{ij=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}-n\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\\
=&r^2\Delta.
\end{aligned}$$

que implica lo que se queria demostrar.

□

El operador de Laplace-Beltrami

En esta sección demostraremos varias propiedades del operador de Laplace-Beltrami. Comenzaremos demostrando que las funciones armónicas esféricas son las funciones propias operador de Laplace-Beltrami en la esfera.

Proposición 37. *Sea* $w:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}$ *una función armónica esférica de grado* ℓ, *como en la Definición 29. Entonces*

$$Bw=-\ell(\ell+n-2)w.$$

Es decir, w es una función propia del operador B con valor propio

$$\lambda = -\ell(\ell+n-2).$$

Demostración. Como w es una función armónica esférica, entonces

$$u(x) := p(x) = |x|^{\ell} w\left(\frac{x}{|x|}\right) = \eta(|x|) w\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

donde $\eta(r) = r^{\ell}$. Entonces, dado que u es armónica, por el Corolario 36,

$$\begin{aligned} 0 =& \Delta u \\ =& \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2}}_{=\ell(\ell-1)r^{\ell-2}} + \underbrace{\frac{n-1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}}_{=(n-1)\ell r^{\ell-2}} \Big) w\left(\frac{x}{|x|}\right)}_{=\ell(\ell+n-2)r^{\ell-2}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\eta(|x|)}_{=r^{\ell-2}}(Bw)\left(\frac{x}{|x|}\right). \end{aligned}$$

Entonces, para $|x| \neq 0$ concluimos

$$(Bw)\left(\frac{x}{|x|}\right) = -\ell(\ell+n-2) w\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

que es lo que se quería demostrar. $\square$

A continuación demostraremos que el operador B es simétrico, y semi definido positivo.

Lema 38. *Sean $u, w \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$, es decir, tales que*

$$\left\{x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}, \left\{x \mapsto w\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\} \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Entonces

$$-\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, Bw\, dS = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\nabla \left\{x \mapsto u\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}\right) \cdot \left(\nabla \left\{x \mapsto w\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}\right) dS. \quad (33)$$

En particular

(a) B es simétrico,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, Bw\, dS = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} w\, Bu\, dS$$

(b) B es semi definido positivo,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, Bu\, dS \geq 0.$$

Demostración. Es claro que para este resultado basta con demostrar (33).

Sea

$$\overline{u}(x) = u\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{y} \quad \overline{w}(x) = w\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Por un lado, notemos ahora que como $\overline{w}$ es homogénea de grado cero, por el Corolario 33, sus valores de frontera se anulan, es decir,

$$0 = \frac{\partial \overline{w}}{\partial r}(x) = \frac{x}{r} \cdot \nabla \overline{w}(x) = \begin{cases} \nu \cdot \nabla \overline{w}(x) & x \in \partial B_2(0), \\ -\nu \cdot \nabla \overline{w}(x) & x \in \partial B_1(0). \end{cases} \tag{34}$$

Por el otro, consideremos

$$\nabla \cdot (\overline{u}\, \nabla \overline{w}) = \nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w} + \nabla \overline{u}\, \Delta \overline{w}.$$

Usando el Teorema de Gauss en $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ tenemos que

$$\int_{B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)}} (\nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w} + \nabla \overline{u}\, \Delta \overline{w})\; dS = \int_{\partial(B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)})} (\overline{u}\, \nabla \overline{w}) \cdot \nu dS. \overset{(34)}{=} 0. \tag{35}$$

Ahora, por el Corolario 36, tenemos que

$$\Delta \overline{w} = \frac{1}{|x|^2}(Bw)\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

y como

$$\begin{aligned} \overline{u}, \overline{w} &\quad \text{son homogéneas de grado } 0 \\ \nabla \overline{u}, \nabla \overline{w} &\quad \text{son homogéneas de grado } -1 \\ \nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w} &\quad \text{es homogéneas de grado } -2, \end{aligned}$$

concluimos

$$(\nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w})(x) = \frac{1}{|x|^2} (\nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w}) \left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Por lo tanto

$$(\nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w} + \nabla \overline{u}\, \Delta \overline{w})(x) = \frac{1}{|x|^2} (\nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{w} + \nabla \overline{u}\, B\overline{w}) \left(\frac{x}{|x|}\right). \tag{36}$$

Ahora por la formula de la co-área en coordenadas radiales, es decir,

$$\int_{B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)}} f(x)dx = \int_1^2 \int_{\partial B_r(0)} f\left(|x|, \frac{x}{|x|}\right) d\frac{x}{|x|}\, dr.$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)}} \left(\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{w} + \nabla\overline{u}\,\Delta\overline{w}\right) dS \\
&\qquad = \int_1^2 \int_{\partial B_r(0)} (\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{w} + \nabla\overline{u}\,\Delta\overline{w})(x) dSdr \\
&\qquad \overset{(36)}{=} \int_1^2 \frac{1}{r^2}\int_{\partial B_r(0)} (\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{w} + \nabla\overline{u}\,B\overline{w})\left(\frac{x}{|x|}\right) dS\, dr \\
&\qquad = \int_1^2 r^{n-3}\, dr \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{w} + \nabla\overline{u}\,B\overline{w})\left(\frac{x}{|x|}\right) d\frac{x}{|x|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (35) implica que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\nabla\overline{u}\cdot\nabla\overline{w} + \nabla\overline{u}\,B\overline{w})\, dS = 0,$$

que es exactamente (33), como se queria demostrar. □

Como corolario del Lema 39 ahora podemos demostrar la ortogonalidad de los armónicos esféricos.

Corolario 39. *Sea u y w armónicos esféricos de grado ℓ y k, respectivamente con $\ell \neq k$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, w\, dS = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 37 y el Lema 38 tenemos que

$$\begin{aligned}
\ell(\ell+n-2)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, w\, dS &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Bu\, w\, dS \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, Bw\, dS \\
&= k(k+n-2)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, w\, dS.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\left[\ell(\ell+n-2) - k(k+n-2)\right]\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\, w\, dS = 0.$$

Notando finalmente que la función $\ell \mapsto \ell(\ell+n-2)$ es monótona, estrictamente creciente, concluimos que

$$\ell(\ell+n-2)-k(k+n-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell=k,$$

lo que implica que u y w son ortogonales. $\square$

La siguiente pregunta natural es sobre la completes de los armónicos esféricos, es decir, si podemos usarlos como una base de las funciones y si son densos en algún sentido. La siguiente proposición responde a esta preguntas.

Proposición 40. *Se satisface que:*

(a) El conjunto de las combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos es denso en $C^0(\mathbb{S}^{n-1})$.

(b) El conjunto de las combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos es denso en $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$.

(c) Todas las funciones propias del operador de Laplace-Beltrami en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ son los armónicos esféricos.

Para demostrar la Proposición 40 necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 41. *Sea $p(x)$ un polinomio homogéneo de grado ℓ. Entonces, existen polinomios armónicos*

$$q_\ell(x), q_{\ell-2}(x), \ldots, q_{\ell-2[\ell/2]}(x)$$

homogéneos de grados

$$\ell, \ell-2, \ldots, \ell-2[\ell/2],$$

respectivamente y tales que

$$p(x)=\sum_{j=1}^{[\ell/2]} |x|^{2j} q_{\ell-2j}(x).$$

Ademas, vamos a necesitar el teorema de aproximación de Weierstrass. Este tma al apéndice

Teorema 42. *Sea $u \in C^0(\overline{B_1(0)})$. Entonces existe $\varepsilon>0$ y un polinomio $p(x)$ tal que*

$$\sup_{\overline{B_1(0)}} |u-p| < \varepsilon.$$

Demostración del Lema 41. Dividiremos la demostración en varios pasos:
1. Sea u una función armónica y homogénea de grado ℓ, entonces para $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta(|x|^k u(x)) = k(k-2+n+2\ell)|x|^{k-2}u(x). \tag{37}$$

En efecto, primero notaremos por un lado que

$$\begin{aligned}\Delta(|x|^k) =& \nabla \cdot (k|x|^{k-2}x)\\ =& \nabla(k|x|^{k-2}) \cdot x + k|x|^{k-2}\nabla \cdot x\\ =& k(k-2)|x|^{k-4}|x|^{k-4}x \cdot x + k|x|^{k-2}n\\ =& k(k-2+n)|x|^{k-2}\end{aligned} \tag{38}$$

y por el otro

$$2\nabla|x|^k \cdot \nabla u(x) = k|x|^{k-2}\underbrace{x \cdot \nabla u(x)}_{=r\partial_r u} \overset{\text{Lema 32(a)}}{=} k|x|^{k-2}\ell u. \tag{39}$$

Por lo tanto,

$$\Delta(|x|^k u(x)) = \underbrace{\underbrace{\Delta(|x|^k)u(x)}_{\overset{(38)}{=} k(k-2+n)|x|^{k-2}u(x)} + \underbrace{2\nabla|x|^k \cdot \nabla u(x)}_{\overset{(39)}{=} \ell k|x|^{k-2}u} + |x|^k \underbrace{\Delta(u(x))}_{=0}}_{= k(k-2+n-2\ell)|x|^{k-2}u(x)},$$

que es (37) como se queria demostrar.
2. Sea $p(x)$ un polinomio homogéneo de grado ℓ. Entonces, existen polinomios armónicos $q_{\ell-2j}(x)$ homogéneos de grado $\ell-2j$ respectivamente, tales que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{[\ell/2]} |x|^{2j} q_{\ell-2j}(x).$$

En efecto, demostraremos el apartado 2. por inducción sobre ℓ.
Base de la inducción Para $\ell = 0$ y $\ell = 1$ tenemos que p es constante y p es un polinomio lineal, respectivamente, entonces

$$p = q_0 \quad \text{y } p = q_1,$$

respectivamente.

Hipótesis inductiva Asumiendo que el resultado es valido para $\ell \geq 0$ queremos demostrar que también lo es para $\ell+2$.

Sea $p(x)$ un polinomio homogéneo de grado $\ell+2$ dado, entonces $\Delta p(x)$ es polinomio homogéneo de grado ℓ y por hipótesis inductiva, existe polinomios armónicos

$$r_\ell, r_{\ell-2}, \dots, r_{\ell-2[\ell/2]}$$

homogéneos de grados

$$\ell, \ell-2, \dots, \ell-2[\ell/2],$$

respectivamente y tales que

$$\Delta p(x) = \sum_{j=0}^{[\ell/2]} |x|^{2j} r_{\ell-2j}(x).$$

Sea

$$q_{\ell+2}(x) := p(x) - \sum_{j=1}^{[\frac{\ell+2}{2}]} |x|^{2j} \frac{r_{\ell+2-2j}(x)}{2j(2\ell+2+n-2j)},$$

$$q_{\ell+2-2j}(x) := \frac{r_{\ell+2-2j}(x)}{2j(2\ell+2+n-2j)}, \quad \text{para } j = 1, \dots, [\frac{\ell+2}{2}].$$

Por lo tanto, por construcción,

$$\begin{aligned} p(x) =& q_{\ell+2}(x) + \sum_{j=1}^{[\frac{\ell+2}{2}]} |x|^{2j} q_{\ell+2-2j}(x) \\ =& \sum_{j=0}^{[\frac{\ell+2}{2}]} |x|^{2j} q_{\ell+2-2j}(x), \end{aligned}$$

donde $q_\ell(x), q_{\ell-2}(x), \dots, q_{\ell-2[\ell/2]}(x)$ son polinómios armónicos de grados $\ell, \ell-2, \dots, \ell-2[\ell/2]$, respectivamente.

Unicamente resta demostrar que $q_{\ell+2}(x)$ es polinómio armónico homogéneo de grado $\ell+2$.

En efecto, la homogeneidad es inmediata, ya que

$$q_{\ell+2}(x) = \underbrace{p(x)}_{\substack{\text{homogéneo}\\ \ell+2}} - \sum_{j=1}^{[\frac{\ell+2}{2}]} \underbrace{\underbrace{|x|^{2j}}_{\substack{\text{homogéneo}\\ 2j}} \underbrace{q_{\ell+2-2j}(x)}_{\substack{\text{homogéneo}\\ \ell+2-2j}}}_{\substack{\text{homogéneo}\\ \ell+2}},$$

y por lo tanto $q_{\ell+2}(x)$ es homogéneo de grado $\ell+2$.

Para demostrar que $q_{\ell+2}(x)$ es armónica calculamos:

$$\Delta q_{\ell+2}(x) = \Delta p(x) - \underbrace{\sum_{j=1}^{[\frac{\ell+2}{2}]} \frac{1}{2j(2\ell+2+n-2j)} \underbrace{\Delta(|x|^{2j} r_{\ell+2-2j}(x))}_{\substack{\overset{(37)}{=} 2j(2j-2+n+2(\ell+2-2j)] \\ \times |x|^{2j-2} r_{\ell+2-2j}(x) \\ = 2j(2\ell+2+n-2j) \\ \times |x|^{2j-2} r_{\ell+2-2j}(x)}}}_{= \sum_{j=1}^{[\frac{\ell+2}{2}]} |x|^{2j-2} r_{\ell+2-2j}(x)} ,$$

$$= \Delta p(x) - \sum_{j=0}^{[\frac{\ell}{2}]} |x|^{2j} r_{\ell-2j}(x) = 0,$$

que es lo que se quería demostrar. □

Ahora ya podemos demostrar:

Demostración de la Proposición 40. 1. Sea $w \in C^0(\mathbb{S}^{n-1})$ dado, y considere

$$u(x) = \begin{cases} |x| w\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{en } x \in \overline{B_2(0)} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Esto define una función $u \in C^0(B_1(0))$.

Ahora, por el Teorema 42, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p(x)$ tal que

$$\sup_{B_1(0)} |u-p| \leq \varepsilon. \tag{40}$$

Sea N el grado de $p(x)$ y considere la descomposición

$$p(x) = \underbrace{p_N(x)}_{\substack{\text{homogéneo} \\ \text{grado } N}} + \underbrace{p_{N-1}(x)}_{\substack{\text{homogéneo} \\ \text{grado } N-1}} + \cdots + \underbrace{p_0(x)}_{\substack{\text{homogéneo} \\ \text{grado } 0}} .$$

Por el Lema 41 existen polinomios armónicos

$$q_{\ell,\ell}(x), q_{\ell,\ell-2}(x), \ldots, q_{\ell,\ell-2[\ell/2]}(x)$$

homogéneos de grados

$$\ell, \ell-2, \ldots, \ell-2[\ell/2],$$

respectivamente, tales que

$$p_\ell(x) = \sum_{j=1}^{[\ell/2]} |x|^{2j} q_{\ell,\ell-2j}(x).$$

Por lo tanto

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{j=1}^{[\ell/2]} |x|^{2j} q_{\ell,\ell-2j}(x),$$

que si nos restringimos a $\mathbb{S}^{n-1}$ tenemos

$$p(x)\Big|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{j=1}^{[\ell/2]} q_{\ell,\ell-2j}(x)\Big|_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

es decir, $p(x)$ restringido sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ se expresa como una combinación lineal finita de polinomios armónicos esféricos, lo cual junto con (40) implican el apartado de la proposición (a).
2. El apartado (b) de la proposición se sigue de la desigualdad

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u-p|^2 dS\right)^{\frac{1}{2}} \leq |\mathbb{S}^{n-1}| \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} |u-p|,$$

y el apartado 1. de la demostración.
3. Para demostrar el apartado (b) se $u\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función propia del operador de Laplace-Beltrami, es decir

$$Bu = \lambda u.$$

Ahora distinguimos dos casos:

A) Sea $\lambda = \ell_0(\ell_0 + n - 2)$ para algún $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$. El objetivo es demostra que u es una función armónica de grado ℓ_0.

De la parte (a) y (b) de la demostración sabemos que los armónicos esféricos son densos den $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Por lo tanto

$$u = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^{N} u_\ell,$$

donde los u_ℓ son armónicos esféricos de grado ℓ.

Ahora, para cada ℓ tenemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u u_\ell dS &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} B u u_\ell dS \\ &\overset{\text{Lema 38}}{=} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u B u_\ell dS \\ &\overset{\text{Prop. 37}}{=} \ell(\ell+n-2) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u u_\ell dS. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\lambda - \ell(\ell+n-2)] \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u u_\ell dS. \tag{41}$$

En particular,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u u_\ell dS = 0 \quad \text{para } \ell \neq \ell_0,$$

lo cual a su vez implica

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u u_\ell dS = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_m u_\ell dS = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_\ell^2 dS.$$

Es decir,

$$u_\ell = 0 \quad \text{para todo } \ell \neq \ell_0,$$

y por lo tanto

$$u = u_{\ell_0}$$

que es un armónico esférico de grado ℓ_0, como se queria demostrar.

B) Sea $\lambda \neq \ell(\ell+n-1)$ para toda $\ell \in \mathbb{N}_0$. En este caso, (41) implica que u es perpendicular a todos los armónicos esféricos de grado ℓ, y por lo tanto a todos las combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos. Es decir, por la parte (b) del la proposición u es perpendicular a un conjunto denso en $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ y por lo tanto

$$u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{S}^{n-1},$$

lo cual implica el último caso de (c), y la proposición.

□